# ANÀLISI FUNCIONAL

**ApuntsFME**

Barcelona, Juny2020

Autors: Martí Oller, Miquel Ortega, Oriol Velasco.

Última modificació: 7 de juny de 2020.

# Índex

# Tema 1

# Espais de Banach

## 1.1 Definició, exemples, i primeres propietats

**Definició 1.1.1.** Diem que $(E, \|\cdot\|)$ és un espai vectorial normat si $E$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) i $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ és una norma, és a dir, satisfà

i) $\|x\| \geq 0$.

ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$.

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si no satisfà la condició ii) però satisfà les altres, diem que és una seminorma.

**Exemple 1.1.2.** A $\mathbb{R}^n$, el nostre primer exemple de normes són $\|\cdot\|_p$, per $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

**Definició 1.1.3.** Dues normes $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ són equivalents (sobre $E$) si $\exists K_1, K_2$ tals que $\forall x \in E$

$$K_1\|x\| \leq \|x\|' \leq K_2\|x\|$$

**Observació 1.1.4.**

- Tota norma indueix una distància $d(x, y) = \|x - y\|$.
- Dues normes equivalents indueixen distàncies uniformement equivalents (en particular, tindran la mateixa topologia i les mateixes successions de Cauchy).
- A $\mathbb{R}^n$ totes les normes són equivalents.
- A la figura 1.1 hi podem trobar exemples d'esferes unitat a $\mathbb{R}^2$ amb la norma $\|\cdot\|_p$.

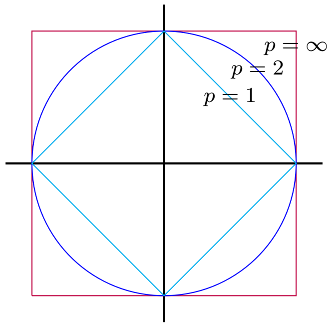


Figura 1.1: Esferes a $\mathbb{R}^2$ amb diferents $\|\cdot\|_p$.

- Si $f \in \mathscr{C}[a,b]$, podem definir-ne dues normes diferents

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

En aquest cas, $\|f_1\| \leq (b-a)\|f\|_\infty$, però $\|f_\infty\| \not\leq K\|f\|_1$, perquè podem trobar funcions d'alçada arbitrària i d'integral constant. Per tant, en espais vectorials de dimensió infinita trobem normes que no són equivalents.

**Definició 1.1.5.** Un espai vectorial normat es diu de Banach si és complet.

**Observació 1.1.6.** Per a la següent proposició, recordem que es diu que una sèrie $\sum x_n$ és absolutament convergent si ho és la sèrie de termes positius $\sum |x_n|$.

**Proposició 1.1.7.** $(E, \|\cdot\|)$ és de Banach si i només si tota sèrie absolutament convergent és convergent.

*Demostració.* Vegem la implicació conversa, deixant la directa com exercici per al lector. Sigui $(x_n)$ una successió de Cauchy de $E$. Considerem una parcial $(x_{n_i})$ definida de tal manera que $\forall k > n_i$

$$\|x_k - x_{n_i}\| < \frac{1}{2^i}.$$

Com els termes

$$x_{n_i} = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_i} - x_{n_{i-1}})$$

són sumes parcials d'una sèrie absolutament convergent, la subsuccessió $(x_{n_i})$ és convergent i aleshores també ho és $(x_n)$ per ser de Cauchy. □

**Observació 1.1.8.** Al llarg dels apunts, farem servir la notació $\mathrm{D}^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$ amb $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-índex i $|\beta| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

**Exemple 1.1.9.** Són espais de Banach els conjunts següents:

- Les funcions contínues i fitades $\mathscr{C}_b^0(\Omega)$ amb $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert i la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.
- Les funcions $\mathscr{C}_b^k(\Omega) = \left\{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathrm{D}^\beta f \in \mathscr{C}_b^0, \forall |\beta| \leq k\right\}$ amb la norma $\|f\|_{\mathscr{C}^k} = \sum_{|\beta|\leq k} \|\mathrm{D}^\beta f\|_\infty$.

- Els subespais dels exemples anteriors $C^0_{\mathrm{b,\,u}}(\Omega)$ (funcions uniformement contínues i fitades), $C^k_{\mathrm{b,\,u}}$ i $\mathscr{C}^k_b(\overline{\Omega})$.
- Els espais de Hölder $\mathscr{C}^\alpha(\Omega)$ per $0 < \alpha \leq 1$. Diem que $f \in \mathscr{C}^\alpha(\Omega)$ si existeix $K$ tal que
$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq K \quad \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega.$$
Són espai de Banach amb la norma
$$\|f\|_{\mathscr{C}^\alpha} = \|f\|_{\mathscr{C}^0} + \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$
Per $\alpha = 1$ la condició de Hölder és la semi-norma de Lipschitz. És a dir,
$$\sup \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = K \implies |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|.$$

**Exemple 1.1.10.** Fixada $1 \leq p < \infty$, sigui
$$L^p(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable}, \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\} / \sim .$$
i
$$\|f\|_p = \left( \int_\Omega |f(x)^p| \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$
on $\sim$ és la relació d'equivalència $f \sim g$ si $\|f-g\|_p = 0$. Cal fer el pas al quocient perquè $\|f\|_p$ sigui una norma i no una seminorma. $L^p(\Omega)$ també és espai de Banach, i també podem obtenir-ne un en el cas $p = \infty$ amb la norma
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f|.$$
i l'espai $L^\infty = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\infty < \infty\}/\sim\}$.

També són espais de Banach els espais de Sobolev $W^{1,p} = \{f \in L^p(\Omega) \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\}$, on la derivada parcial està definida en un sentit més dèbil que l'habitual, que no veurem en aquest curs.

**Exemple 1.1.11.** Finalment, un últim exemple d'espais de Banach són els espais de successions. Si $1 \leq p < \infty$,
$$l^p = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum |x_n|^p < \infty \right\}$$
amb la norma
$$\|x\|_p = \left( \sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Si $p = \infty$,
$$l_\infty = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \mid \sup |x_n| < \infty \right\}$$
amb la norma
$$\|x\|_\infty = \sup |x_n|.$$
Des d'un punt de vista de teoria de la mesura, aquests dos espais són casos particulars dels espais $L^p$ si prenem $\Omega = \mathbb{Z}$ i $\mu$ la mesura discreta.

**Proposició 1.1.12.** Siguin $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espais vectorials normats i siguin $T: E \to F$ lineal. LLavors, les següents propietats són equivalents:

i) Existeix $x_0 \in E$ tal que $T$ és contínua en $x_0$.

ii) $T: E \to F$ és uniformement contínua.

iii) $T$ és fitada, és a dir, existeix $K > 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq K\|x\|_E \ \forall x \in E$.

*Demostració.* Es deixen la majoria de les implicacions com exercici per al lector, amb la indicació que cal usar $T$ lineal, és a dir, $Tx - Ty = T(x-y)$. Provarem, però, *i)* $\implies$ *iii)*. Tenim que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|y - x_0\|_E < \delta \implies \|Ty - T_{x_0}\|_F < \varepsilon$. Prenem $\varepsilon = 1$, i $\delta_0$ donat per la definició anterior. Sigui $x \in E$, $x \neq 0$. Considerem $z = \frac{\delta_0}{2\|x\|_E} x$. Aleshores

$$\|z\|_E = \frac{\delta_0}{2\|x\|_E}\|x\|_E = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0,$$

de manera que $\|Tz\|_F < 1$, és a dir,

$$\|T\left(\frac{\delta_0}{2\|x\|_E} x\right)\|_F < 1,$$

d'on, traient les constants i aïllant $\|Tx\|_F$,

$$\|Tx\|_F \leq \frac{2}{\delta_0}\|x\|_E.$$

□

**Proposició 1.1.13.** Siguin $E, F$ espais vectorials normats.

i) Si $\dim E < \infty$ i $T: E \to F$ és lineal aleshores $T$ és contínua.

ii) Si $\dim E = \infty$, existeix $T: E \to F$ lineal no contínua.

*Demostració.*

i) Siguin $e_1, e_2, \ldots, e_n$ una base de $E$. Tot $x \in E$ s'escriu com $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + e_n$. Definim una norma auxiliar en $E$

$$\|x\|' = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Com totes les normes de $\mathbb{R}^n$ són equivalents, existeix $Q > 0$ tal que $\|x\|' \leq Q\|x\|_E$. Vegem que $T$ compleix la propietat iii) de la proposició 1.1.12.

$$\|Tx\|_F = \|\alpha_1 Te_1 + \alpha_2 Te_2 + \cdots + \alpha_n Te_n\|_F \leq |\alpha_1|\|Te_1\|_F + \cdots + |\alpha_n|\|Te_n\|_F \overset{\text{C-S}}{\leq}$$
$$\overset{\text{C-S}}{\leq} (|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}}(\|Te_1\|_F^2 + \cdots + \|Te_n\|_F^2)^{\frac{1}{2}} = Q'\|x\|_E' \leq Q'Q\|x\|_E.$$

ii) No demostrarem l'existència per a tot espai, però en donem un exemple per $E = \mathbb{R}[X]$, amb $\|P(x)\|_E = \sup_{-1\leq x\leq 1}|P(x)|$. Si prenem

$$T: E \to \mathbb{R}$$
$$P(x) \mapsto P'(1)$$

Aleshores $T(x^n) = n$, però $\|x^n\|_E = 1$, d'on $T$ no és fitat.

□

**Definició 1.1.14.** Si $E$, $F$ són espais vectorials normats denotarem per $\mathcal{L}(E,F)$ el conjunt d'aplicacions $T : E \to F$ lineals i contínues, i també farem servir $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

**Definició 1.1.15.** Si $E, F$ són espais vectorials normats anomenarem a $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ el dual topològic de $E$. Si $f \in E'$, $x \in E$, escriurem $f(x)$ o $\langle f, x\rangle_{(E',E)}$.

**Proposició 1.1.16.** Siguin $E, F$ espais vectorials normats.

1. $\mathcal{L}(E,F)$ és espai vectorial normat amb $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|_F$.

2. Si $F$ és de Banach, llavors $\mathcal{L}(E,F)$ també ho és.

Abans de fer-ne la prova, remarquem una conclusió d'aquest resultat, i posem un exercici que necessitarem per a la prova.

**Observació 1.1.17.** Notem que $\|Tx\|_F \le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E$, ja que

$$\|T\| \ge \|T\frac{x}{\|x\|_E}\|_F,$$

d'on

$$\|T\|\|x\|_E \ge \|Tx\|_F.$$

**Exercici 1.1.18.** Si $\|\cdot\|$ és norma, demostrar que $|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$, i a partir d'aquesta desigualtat veure que la norma és una aplicació contínua.

*Demostració de la proposició 1.1.16.*

1. La linealitat és senzilla de comprovar. Demostrem la desigualtat triangular:

$$\|T+S\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\le 1} \|(T+S)x\|_F \le \sup_{\|x\|_E\le 1} \|Tx\|_F + \|Sx\|_F \le$$
$$\le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|S\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

2. Suposem $T_m \in \mathcal{L}(E,F)$ una successió de Cauchy amb aquesta norma. Donat $x \in E$ qualsevol, notem que $T_n(x)$ és una successió de Cauchy en F perquè

$$\|T_nx - T_mx\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \le \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E.$$

Com que $F$ és complet, per a cada $x \in E$, existeix $Tx = \lim_{n\to\infty} T_nx \in F$. Tal i com hem definit $T$ és lineal per la linealitat del límit. Vegem que també és contínua. Si $T_n$ és de Cauchy, aleshores és fitada a $\mathcal{L}(E,F)$. Si $K$ és una fita de $\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, aleshores

$$\|T_nx\| \le \|T_n\|\|x\| \le K\|x\|.$$

Prenent el límit a tots dos extrems de la desigualtat, obtenim que $\|Tx\| \le K\|x\|$, d'on $T$ és fitada i per tant contínua. Falta veure que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. Per ser $T_n$ de Cauchy, sabem que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ tal que } n \ge n_0 \implies \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Per tant, si $n \ge n_0$,

$$\|T_nx - T_mx\|_F \le \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

per a tota $x \in E$. Si prenem $m \to \infty$, obtenim que per a $n \ge n_0$,

$$\|T_nx - Tx\|_F \le \varepsilon\|x\|x$$

per a tota $x \in E$. En particular, si $\|x\| \le 1$ ens dóna $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \varepsilon$.

□

Donem a continuació una versió senzilla del teorema d'extensió de Hahn-Banach.

**Teorema 1.1.19.** *Teorema de Hahn-Banach.*
Sigui $E$ un espai vectorial normat i $F \subset E$ un subespai vectorial. Sigui $f\colon F \to \mathbb{R}$ lineal i tal que existeix $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|_E$ per a tota $x \in F$. Aleshores existeix almenys una extensió $\tilde{f}$ de $f$, $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $|\tilde{f}(x)| \leq C\|x\|_E$ per a tota $x \in E$.

Abans de donar-ne la prova, cal introduir breument el lema de Zorn i algunes definicions necessàries per aquest.

**Definició 1.1.20.** Sigui $(P, \leq)$ un conjunt parcialment ordenat. Direm que $Q \subset P$ és totalment ordenat si donats $x, y \in Q$ qualssevol, o bé $x \leq y$ o bé $y \leq x$. Direm que $c \in P$ és fita superior d'un subconjunt $Q \subseteq P$ si $x \leq c$ per a tota $x \in Q$. Es diu que $(P, \leq)$ és inductiu si tot conjunt ordenat $Q \subset P$ té almenys una fita superior $c \in P$. Es diu que $m \in P$ és element maximal si $x \geq m \implies x = m$.

**Lema 1.1.21.** *Lema de Zorn.* Si $P$ és un conjunt ordenat inductiu, aleshores té elements maximals.

**Lema 1.1.22.** Siguin $E$ un espai vectorial normat i $F_m \subset E$ un subespai vectorial tals que $F_m \neq E$, i $f_m\colon F_m \to \mathbb{R}$ lineal, amb $C > 0$ tal que $|f_m(x)| \leq C\|x\|$ per a tota $x \in F_m$. Aleshores existeix almenys un subespai $F_0 \subset E$ amb $F_m \subsetneq F_0$, $F_m \neq F_0$ i $f_0\colon F_0 \to \mathbb{R}$ extensió de $f_m$ també lineal i també tal que $|f_0(x)| \leq C\|x\|$ per a tota $x \in F_0$.

*Demostració.* Sigui $x_0 \in E \setminus F_m$ i considerem $F_0 = \{x + tx_0 \mid x \in F_m, t \in \mathbb{R}\}$. Definim $f_0(x + tx_0) = f_m(x) + t\alpha$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$ encara per decidir. Notem que $f_0$ està ben definida perquè l'expressió de $y \in F_0$ com $y = x + tx_0$ és única. Volem trobar $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que es compleixi
$$|f_m(x) + t\alpha| \leq C\|x + tx_0\|$$
per a tota $x \in F_m$ i $t \in \mathbb{R}$. Això és equivalent a demanar
$$f_m(x) + t\alpha \leq C\|x + tx_0\|$$
perquè el terme serà positiu o bé per $x$, $t$ o bé per $-x$, $-t$. Per hipòtesi, la desigualtat es satisfà per $t = 0$. Per tant, podem suposar $t \neq 0$ i, dividint per $|t|$, volem
$$f_m\left(\frac{x}{|t|} + \frac{t}{|t|}\alpha\right) \leq C\left\|\frac{x}{|t|} + \frac{t}{|t|}x_0\right\|.$$
Anomenem $y = \frac{x}{|t|}$. Volem doncs que es satisfaci per a tota $y \in F_m$
$$\begin{cases} f_m(y) + \alpha \leq C\|y + x_0\| \\ f_m(y) - \alpha \leq C\|y - x_0\| \end{cases}$$
És a dir, que
$$\sup_{y \in F_m} f_m(y) - C\|y - x_0\| \leq \alpha \leq \inf_{z \in F_m} C\|z + x_0\| - f_m(z),$$
i existirà tal $\alpha$ només si es satisfà la desigualtat entre el terme de l'esquerra i el de la dreta. Però tenim que
$$f_m(y) + f_m(z) = f_m(y + z) \leq |f_m(y + z)| \leq C\|y + z\| \leq C\|y - x_0\| + C\|z + x_0\|,$$
i reordenant els termes obtenim la desigualtat desitjada. □

*Demostració del teorema 1.1.19.* Considerem el conjunt de parelles $(F_i, f_i)$ tals que $F \subset F_i \subset E$, $F_i$ espai vectorial, $f_i\colon F_i \to \mathbb{R}$ una extensió de $f$ i que compleix $|f_i(x)| \leq C\|x\|$ per a tota $x \in F_i$. Aquest conjunt està parcialment ordenat per $(F_i,\, f_i) \leq (F_j,\, f_j)$ si $F_i \subseteq F_j$ i $f_j$ és extensió de $f_i$. Vegem que aquest conjunt és inductiu. Suposem $\{(F_i,\, f_i),\, i \in I\}$ totalment ordenat. Aleshores la parella $(U_{i\in I}F_i,\, \tilde{f})$, on $\tilde{f}(x) = f_i(x)$ si $x \in F_i$, és una fita superior. Pel lema de Zorn, existeix un element maximal $(F_m, f_m)$ que no admet una extensió pròpia. Si $F_m \neq E$ això suposa una contradicció amb el lema 1.1.22. □

**Corol·lari 1.1.23.** Si $E$ és un espai vectorial normat, aleshores per a tota $x_0 \in E$ es té que

$$\|x_0\| = \sup_{f\in E',\, f\neq 0} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|_{E'}}.$$

*Demostració.* Per una banda, tenim que

$$|f(x_0)| \leq \|f\|_{E'}\|x_0\|_E,$$

d'on, dividint per $\|f\|_{E'}$,

$$\sup_{f\in E',\, f\neq 0} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|_{E'}} \leq \|x_0\|.$$

Per a veure la desigualtat contrària, usem el teorema de Hahn-Banach (1.1.19) per trobar una funció on s'obté la igualtat. Definim $F = \{tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ subespai vectorial de $E$ que, si $x_0 \neq 0$, té dimensió 1. Definim també l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon F &\to \mathbb{R} \\ tx_0 &\mapsto t\|x_0\| \end{aligned}$$

Aleshores

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{t\in\mathbb{R},\, t\neq 0} \frac{|f(tx_0)|}{\|tx_0\|} = \sup_{t\in\mathbb{R},\, t\neq 0} \frac{|t|\|x_0\|}{|t|\|x_0\|} = 1.$$

Pel teorema de Hahn-Banach, $\tilde{f}$ admet una extensió $\tilde{\tilde{f}}$ amb $\|\tilde{\tilde{f}}\| = 1$. Finalment,

$$\frac{|\tilde{\tilde{f}}(x_0)|}{\|\tilde{\tilde{f}}\|} = \frac{|\tilde{f}(x_0)|}{1} = \|x_0\|.$$

□

**Corol·lari 1.1.24.** Sigui $E$ un espai vectorial normat. Aleshores

$$E = \{0\} \iff E' = \{0\}\,.$$

*Demostració.* La implicació directa és clara. Vegem doncs la conversa. Si $E \neq 0$, existeix $x_0$ amb $\|x_0\| > 0$. El corol·lari anterior ens diu que aleshores existeix $f_0 \in E'$, $f_0 \neq 0$. □

**Corol·lari 1.1.25.** Sigui $E$ un espai vectorial normat. $F \subseteq E$ subespai vectorial tal que $\overline{F} \neq E$. Aleshores existeix $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$ per a tota $x \in F$ però $f \neq 0$.

*Demostració.* Escollim $x_0 \neq 0$, $x_0 \notin \overline{F}$, $x_0 \in E \setminus F$. Definim $H = F + \{tx_0\} \subset E$ i observem que tot element $y \in H$ s'expressa de manera única com $y = y_1 + tx_0$, amb $y_1 \in F$, i definim l'aplicació lineal

$$f\colon H \to \mathbb{R} y = y_1 + tx_0 \quad \mapsto t$$

Vegem que $f$ és contínua. Com que $x_0 \notin \overline{F}$, $\mathrm{d}(x_0, \overline{F}) = c > 0$. Aleshores

$$\|y_1 + tx_0\| = |t| \left\| \frac{y_1}{t} + x_0 \right\| = |t| \left\| \frac{-y_1}{t} - x_0 \right\| \geq |t|c.$$

Per tant,

$$|f(y_1 + tx_0)| = |t| \leq \frac{\|y_1 + tx_0\|}{c},$$

és a dir, l'operador és fitat. A més, $f$ s'anul·la sobre $F$, perquè si $x \in F$, $f(x) = f(x + 0x_0) = 0$. Usant Hahn-Banach (1.1.19), $f$ admet una extensió $\tilde{f}$ lineal i contínua. Aleshores, $\tilde{f}(F) = f(F) = 0$, i per ser contínua, $\tilde{f}(\overline{F}) = 0$. □

**Definició 1.1.26.** Anomenem bidual d'un espai vectorial normat $E$ a $E'' = (E')'$. Definim $j\colon E \to E''$ que envia $x \in E$ a la següent aplicació de $E''$

$$\begin{aligned} j(x)\colon E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

**Observació 1.1.27.** Tal i com l'hem definida $\langle j(x), f \rangle = \langle f, x \rangle$. A més, $j$ és injectiva, i també podem comprovar que preserva la norma, ja que

$$\|j(x)\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle j(x), f \rangle| = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \overset{1.1.23}{=} \|x\|.$$

**Definició 1.1.28.** Els espais de Banach tals que $j$ és exhaustiva s'anomenen reflexius.

## 1.2 Lema de Baire i conseqüències

A continuació presentem el lema de Baire i alguns dels teoremes fonamentals de l'anàlisi funcional. Malgrat en aquests apunts presentem les demostracions d'alguns dels resultats, al curs no les hem vistes.

**Lema 1.2.1.** *Lema de Baire.* Sigui $X$ un espai mètric complet i sigui $(X_n)_{n\geq 1}$ una successió de subconjunts tancats de $X$ tals que $\mathrm{Int}(X_n) = \varnothing$, per a tot $n \geq 1$. Aleshores $\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n\geq 1} X_n\right) = \varnothing$. Equivalentment, si $X_n$ són subconjunts oberts i densos, aleshores $\bigcap_{n\geq 1} X_n$ també és dens.

*Demostració.* Demostrarem la versió per oberts. Sigui $p \in X$ i $B_r(p)$ una bola centrada en $p$. Prenem $x_1 \in B_r(p) \cap X_1$, que existeix per la densitat de $X_1$. Per ser $B_r(p) \cap X_1$ obert, podem trobar $r_1$ tal que $\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_r(p) \cap X_1$ i $r_1 < 1$. Anàlogament, construim $x_n$ i $r_n$ de tal manera que $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap X_n$ i $r_n < \frac{1}{n}$. Tal i com hem construït la successió, si $m > n$, $x_m \in B_{r_n}(x_n)$, i $r_n < \frac{1}{n}$, d'on la successió és de Cauchy. Finalment, si $x = \lim x_n$, tenim que $x \in \overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset X_n$, d'on $x \in \bigcap_{n\geq 1} X_n$. A més, $x \in \overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_r(p)$. Per tant, el conjunt $\bigcap_{n\geq 1} X_n$ és dens a $X$. □

**Teorema 1.2.2.** *Teorema de Banach-Steinhaus o de la fitació uniforme.*
Siguin $E$ i $F$ dos espais de Banach. Sigui $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(E, F)$ un subconjunt (no necessàriament numerable). Suposem que per a tota $x \in E$ es té que $\sup\{\|Tx\|;\, T \in \mathcal{T}\} < \infty$. Aleshores

$$\sup\{\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)};\, T \in \mathcal{T}\} < \infty.$$

Demostrem en primer lloc un lema que farem servir a la prova.

**Lema 1.2.3.** Si per a una bola oberta $B_r(p)$ de radi $r$ i centre $p$ qualssevol es satisfà $\sup\{\|Tx\|;\, T \in \mathcal{T}, x \in B\} < \infty$, aleshores $\sup\{\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)};\, T \in \mathcal{T}\} < \infty$.

*Demostració.* Sigui $C$ la fita uniforme sobre la bola $B_r(p)$. Si $p$ és l'origen, aleshores $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{C}{r}$. En cas contrari, per $p + x \in B_r(p)$ tenim $\|Tx\| = \|T(x + p - p)\| \leq \|T(x + p)\| + \|Tp\| < 2C$, d'on $2C$ és una fita uniforme per la bola $B_r(0)$ centrada a l'origen, i ens reduïm al cas anterior. □

*Demostració del teorema 1.2.2.* Per a provar el teorema procedirem per contradicció. Suposem que no existeix una fita de la norma dels operadors. Prenem $X_n = \{x \mid \exists T \in \mathcal{T} \text{ tal que } \|Tx\| > n\}$. Aquests conjunts són oberts perquè si $\|Tx\| > n$, la continuïtat de $T$ ens assegura que existeix un entorn de $x$ on també se satisfà la desigualtat. A més, són densos perquè si existís una bola que no tallés $X_n$, aleshores $n$ seria una fita de $\|Tx\|$ sobre aquesta bola, i usant el lema 1.2.3 existiria una fita de $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ per a tot $T \in \mathcal{T}$. Usant el lema de Baire, la intersecció dels $X_n$ és densa, i en particular no buida. Prenent $x \in \bigcap_{n\geq 1} X_n$, per a tot $n$ existeix $T \in \mathcal{T}$ tal que $\|Tx\| > n$, d'on $\sup\{\|Tx\|;\, T \in \mathcal{T}\} = \infty$, i hem arribat a la contradicció desitjada. □

**Corol·lari 1.2.4.** Sigui $E$ i $F$ dos espais de Banach i $T_n$ una successió a $\mathcal{L}(E,F)$ tal que per a tota $x \in E$ la successió $T_n(x)$ és convergent. Si anomenem $Tx$ al límit es té

1. $\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\} < \infty$,
2. $T \in \mathcal{L}(E,F)$,
3. $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

*Demostració.*

1. Si $T_n(x)$ és convergent, aleshores $\|T_n(x)\|$ també ho és, i en particular és fitat. Per tant, prenent $\mathcal{T} = T_n$ podem aplicar el principi de la fitació uniforme 1.2.2 per concloure que la norma dels operadors també és fitada.
2. Sigui $C$ la fita de l'apartat anterior. Aleshores $\|T_n(x)\| < C\|x\|$. Fent el pas al límit, $\|T(x)\| < C\|x\|$, d'on $T \in \mathcal{L}(E,f)$.
3. Tenim que $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|\|x\|$, d'on, prenent límits,
$$\|T(x)\| = \lim \|T_n(x)\| = \liminf \|T_n(x)\| \leq (\liminf \|T_n\|)\|x\|.$$

□

**Corol·lari 1.2.5.** Sigui $G$ un espai de Banach i $B$ un subconjunt de $G$. Suposem que per a tota $g \in G'$ el conjunt $g(B) = \{\langle g, b\rangle;\, b \in B\}$ és fitat a $\mathcal{R}$. Aleshores $B$ és fitat.

*Demostració.* Si veiem els elements $b \in B$ com elements del bidual, és a dir, operadors sobre els elements de $G'$, aleshores podem fer servir el principi de la fitació uniforme (1.2.2) amb $\mathcal{T} = B$ i $E = G'$ per concloure que $B$ és un subconjunt fitat de $G''$. Com la norma sobre el bidual coincideix amb la norma habitual, $B$ és fitat. □

**Corol·lari 1.2.6.** Sigui $G$ un espai de Banach i $B'$ un subconjunt de $G'$. Suposem que per a tota $x \in G$ el conjunt $\{\langle b', x\rangle;\, b' \in B'\}$ és fitat a $\mathcal{R}$. Aleshores $B'$ és fitat a $G'$.

*Demostració.* Si prenem $\mathcal{T} = B'$ i $F = \mathbb{R}$ podem fer servir el principi de la fitació uniforme (1.2.2) per concloure que $B'$ és fitat a $G'$. $\square$

**Teorema 1.2.7.** *Teorema de l'aplicació oberta.*
Siguin $E, F$ espais de Banach i $T \in \mathcal{L}(E, F)$ exhaustiva. Llavors, $T$ transforma conjunts oberts de $E$ en conjunts oberts de $F$.

**Corol·lari 1.2.8.** Siguin $E, F$ espais de Banach i $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijectiva. Aleshores $T^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$.

**Corol·lari 1.2.9.** Suposem que $E$ és espai de Banach amb les normes $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$. Suposem també que $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ per a tota $x \in E$ i amb $C$ independent de $x$. Aleshores, les normes són equivalents.

**Teorema 1.2.10.** *Teorema de la gràfica tancada.*
Siguin $E, F$ espais de Banach i sigui $T\colon E \to F$ lineal. Suposem que

$$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in E\} \subset E \times F$$

és un subconjunt tancat (amb la norma producte $\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$). Llavors, $T$ és contínua.

## 1.3 Suma de subespais

**Teorema 1.3.1.** Sigui $E$ espai de Banach i $G, L \subset E$ dos subespais vectorials tancats tals que $G + L = E$, $G \cap L = \{0\}$. Aleshores, existeix una constant $C > 0$ tal que tota $z \in E$ s'escriu de forma única com a $z = x + y$, on $x \in G$, $y \in L$ i es compleix que $\|x\| \leq C\|z\|$, $\|y\| \leq C\|z\|$.

*Demostració.* El fet que tot $z \in E$ s'escriu com $z = x + y$ ve donat per $E = G + L$. La unicitat ve donada per $G \cap L = \{0\}$, ja que

$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0 \implies x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \implies (x_1 - x_2), (y_2 - y_1) \in G \cap L,$$

d'on $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Notem que $G$ i $L$ són espais de Banach amb la restricció de $\|\cdot\|_E$ corresponent. Per tant, $G \times L$ és espai de Banach amb la norma $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Definim doncs

$$\begin{aligned} T\colon G \times L &\to E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

Tenim que

$$\|T(x + y)\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|_{G\times L}.$$

I, per tant, $T$ és contínua. A més, és bijectiva pel que hem vist abans. Usant el corol·lari 1.2.8, $T^{-1}$ també és lineal i contínua. Per tant,

$$\|x\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E = \|(x, y)\|)_{G\times L} = \|T^{-1}(x + y)\|_{G\times L} \leq C\|x + y\|_E = C\|z\|_E.$$

Anàlogament, $\|y\|_E \leq C\|z\|_E$ i obtenim el resultat desitjat. $\square$

**Observació 1.3.2.** Si $E$ és espai de Banach i $G, L \subsetneq E$ són subespais tancats, l'espai $G + L \subset E$ no és necessàriament tancat.

**Definició 1.3.3.** Sigui $E$ espai de Banach i $G \subset E$ un subespai vectorial tancat. Aleshores, es diu que $G$ admet un suplementari topològic $L$ i existeix un subespai vectorial tancat $L \subset E$ tal que $G + L = E$, $G \cap L = \{0\}$.

**Observació 1.3.4.** No tot subespai vectorial tancat de $E$, si $\dim E = \infty$, admet un suplementari topològic.

**Proposició 1.3.5.** Sigui $G \subset E$ un subespai vectorial tancat. Aleshores en qualsevol dels següents casos admet un suplementari topològic.

i) Si $G \subset E$ de dimensió finita.

ii) Si $G$ té codimensió finita. Diem que $G \subset E$ té codimensió finita si existeixen $e_1, \dots, e_n \in E \setminus G$ linealment independents tals que $G + \langle e_1, \dots, e_n \rangle = E$.

iii) Si $E$ és un espai de Hilbert. Diem que $E$ és un espai de Hilbert, si és un espai de Banach tal que $\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$ amb $(\cdot, \cdot)$ és una forma bilineal.

*Demostració.* Demostrarem només i), ii) es conclou per la mateixa definició, i veurem iii) més endavant. Sigui $e_1, \dots, e_n$ base de $G$. Si $x \in G$, $x = f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + \cdots + f_n(x)e_n$. A més, $f_i \colon G \to \mathbb{R}$ és lineal i contínua. Pel teorema de Hahn-Banach (1.1.19), existeixen extensions $\tilde{f}_i \colon E \to \mathbb{R}$ també contínues. Definim llavors

$$L = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ \tilde{f}_i^{-1}(\{0\}) \right\}.$$

$L$ és un subespai vectorial tancat per ser intersecció de subespais vectorials tancats. Si $x \in G \cap L$, $f_i(x) = 0$, d'on $x = 0e_1 + \cdots + 0e_n = 0$. Vegem ara que $G + L = E$. Sigui $x \in E$, i definim $x_0 = \tilde{f}_1(x)e_1 + \cdots + \tilde{f}_n(x)e_n$, $x_0 \in G$. Vegem que $x - x_0 \in L$:

$$\tilde{f}_i(x - x_0) = \tilde{f}_i(x) - f_i(x_0) = \tilde{f}_i(x) - f_i(\tilde{f}_1(x)e_1 + \cdots + \tilde{f}_n(x)e_n) = \tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(x) = 0.$$

□

**Observació 1.3.6.** Un subespai vectorial $G$ d'un espai de Banach $E$ que tingui codimensió 1 no és necessàriament tancat.

*Demostració.* En donem un exemple. Sigui $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ lineal no contínua (suposem $\dim E = \infty$). Sigui $G = \varphi^{-1}(\{0\})$, i sigui $x_0 \in E \setminus G$ tal que $\varphi(x_0) = 1$. Sigui $L = \{tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Si $x \in G \cap L$, aleshores $x = tx_0$, d'on

$$0 \overset{x_0 \in G}{=} \varphi(tx_0) = t,$$

de manera que $x = 0$ i $G \cap L = \{0\}$. A més, si $x \in E$ aleshores $x = (x - \varphi(x)x_0) + \varphi(x)x_0$, on el primer terme és de $G$ i el segon de $L$, de manera que $G + L = E$.

Finalment, si $G$ fos tancat, $L$ seria suplementari topològic de $G$. Pel teorema anterior (1.3.1), les projeccions $z = x + y \mapsto x$ i $z = x + y \mapsto y$ són contínues. Per tant, $z \mapsto \varphi(z)x_0$ seria contínua, de manera que $\varphi$ seria contínua. □

**Definició 1.3.7.** Sigui $E$ espai de Banach i $M \subset E$ un subespai vectorial. Sigui $N \subset E'$ un subespai vectorial. Es defineixen

$$M^\perp = \left\{ f \in E' \mid \langle f, x \rangle_{E', E} = 0,\ \forall x \in M \right\} \subset E'$$
$$N^\perp = \left\{ x \in E \mid \langle f, x \rangle_{E', E} = 0,\ \forall f \in N \right\} \subset E$$

Notem que $M^\perp$ i $N^\perp$ són subespais vectorials tancats, ja que són intersecció dels subespais vectorials tancats

$$M^\perp = \bigcap_{x\in M} \Big\{f \in E' \mid \langle f, x\rangle_{E',E} = 0\Big\}$$
$$N^\perp = \bigcap_{f\in N} \Big\{x \in E \mid \langle f, x\rangle_{E',E} = 0\Big\}$$

on $\Big\{f \in E' \mid \langle f, x\rangle_{E',E} = 0\Big\}$ és tancat per ser $h^{-1}(0)$ amb

$$\begin{aligned} h\colon E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

lineal i contínua.

**Teorema 1.3.8.** Siguin $M, N$ subespais vectorials de $E$, $E'$ respectivament. Aleshores

i) $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$

ii) $(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}$

*Demostració.* Demostrarem el primer apartat, el segon és senzill. La inclusió $\overline{M} \subset \Big(M^\perp\Big)^\perp$ és clara perquè $M \subset \Big(M^\perp\Big)^\perp$ i el darrer és un conjunt tancat. Suposem ara que $\overline{M} \subsetneq \Big(M^\perp\Big)^\perp$. Aleshores $\overline{M}$ és un subespai tancat propi de l'espai de Banach $\Big(M^\perp\Big)^\perp$, i pel corol·lari 1.1.25 tenim $f \in \Big(\Big(M^\perp\Big)^\perp\Big)'$, $f \neq 0$ amb $\langle f, x\rangle = 0$ per a tota $x \in \overline{M}$. Pel teorema de Hahn-Banach (1.1.19), aquesta $f$ es pot estendre a $\tilde{f} \in E'$ tal que $\tilde{f} \neq 0$, $\langle \tilde{f}, x\rangle = 0$ per a tota $x \in \overline{M}$. Tal i com l'hem construït, existeix $x_0 \in \Big(M^\perp\Big)^\perp$ tal que $\langle f, x_0\rangle \neq 0$. Paral·lelament, $\tilde{f} \in M^\perp$, d'on $\langle f_0, x_0\rangle = 0$ perquè $x_0 \in \Big(M^\perp\Big)^\perp$, una contradicció. □

## 1.4 Operadors adjunts

**Definició 1.4.1.** Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, definim el seu operador adjunt $A^* \in \mathcal{L}(F', E')$ per:

$$\langle A^* f, x\rangle_{E',E} = \langle f, Ax\rangle_{F',F}.$$

**Teorema 1.4.2.** Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, aleshores $A^* \in \mathcal{L}(F', E')$ i $\|A^*\| = \|A\|$.

*Demostració.* Vegem primer que

$$\begin{aligned} \|A^* g\|_{E'} &= \sup_{x\in E,\, \|x\|\le 1} |\langle A^* g, x\rangle|_{E',E} = \sup_{x\in E,\, \|x\|\le 1} |\langle g, Ax\rangle|_{F',F} \le \\ &\le \sup_{x\in E,\, \|x\|\le 1} \|g\|_{F'} \|Ax\|_F \le \sup_{x\in E,\, \|x\|\le 1} \|g\|_{F'} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \le \|g\|_F \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}. \end{aligned}$$

Això ens diu que $A^*$ és contínua i que $\|A^*\| \le \|A\|$. Queda, doncs, veure la desigualtat contrària. Ara bé,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_F &\overset{1.1.23}{=} \sup_{g\in F', \|g\|\le 1} |\langle g, Ax\rangle_{F',F}| = \sup_{g\in F', \|g\|\le 1} |\langle A^* g, x\rangle_{E',E}| \le \sup_{g\in F', \|g\|\le 1} \|A^* g\|_{E'} \|x\|_E \le \\ &\le \sup_{g\in F', \|g\|\le 1} \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} \|g\|_{F'} \|x\|_E = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} \|x\|_E. \end{aligned}$$

□

**Exemple 1.4.3.** Vegem com són els adjunts dels operadors integrals en $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Primer, però, caldrà definir-los, ja que no els hem vist fins ara. Sigui $K(x,y) = L^2(\Omega\times\Omega)$. Donada $u \in L^2(\Omega)$, definim

$$(Au)(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Remarquem que es poden interpretar com un anàleg continu de les matrius als espais de dimensió finita. Vegem que està ben definit i que $A \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$. Com que $\int_{\Omega\times\Omega} K^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$, sabem que existeix $E \subset \Omega$ de mesura 0 tal que si $x_0 \in \Omega \setminus E$, llavors $y \mapsto K(x_0,y)$ viu a $L^2(\Omega)$. Per tant, podem definir

$$(Au)(x_0) = \int_\Omega K(x_0,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

quasi per a tota $x_0 \in \Omega$, ja que Cauchy-Schwarz ens assegura que el producte de funcions a $L^2$ viu a $L^1$. A més,

$$\int_\Omega ((Au)(x_0))^2\,\mathrm{d}x_0 = \int_\Omega \left(\int_\Omega K(x_0,y)u(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x_0,$$

que, altra vegada usant Cauchy-Schwarz, és menor o igual a

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega K^2(x_0,y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x_0 =$$
$$= \left(\int_\Omega u^2(y)\,\mathrm{d}y\right)\int_{\Omega\times\Omega} K^2(x_0,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_0 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)},$$

d'on $Au \in L^2(\Omega)$ i

$$\|Au\|_{L^2(\Omega)} \leq \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

A més, $L^2(\Omega)$ és de Hilbert amb el producte escalar

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Com veurem més endavant, en un espai de Hilbert es té que $H' = H$ amb

$$\langle u,v\rangle_{H',H} = (u,v)_H.$$

Finalment, vegem com és $A^*$:

$$\langle A^*v,u\rangle_{H',H} = \langle v,Au\rangle_{H',H} = (v,\ Au)_{L^2} = \int_\Omega v(x)\int_\Omega K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Que, usant Fubini, és igual a

$$\int_\Omega u(y)\int_\Omega K(x,y)v(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Per tant,

$$(A^*v)(y) = \int_\Omega K(x,y)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 1.5 Operadors no fitats

**Definició 1.5.1.** Direm que $A$ és un operador no fitat entre dos espais de Banach $E$ i $F$ si

$$A\colon D(A) \subseteq E \to F$$

és lineal i $D(A)$, el seu domini, és un subespai vectorial de $E$.

**Definició 1.5.2.** Direm que $A$ un operador no fitat és tancat si

$$G(A) = \{(u, v) \in E \times F \mid u \in D(A),\, v = Au\}$$

és un subespai vectorial tancat de $E \times F$.

**Definició 1.5.3.** Direm que $A$ un operador no fitat és fitat si existeix $C > 0$ tal que $\|Au\| \leq C\|u\|$ per a tota $u \in D(A)$.

**Observació 1.5.4.**

i) Si $A$ és tancat i $D(A) = E$, aleshores $A \in \mathcal{L}(E, F)$ pel teorema de la gràfica tancada (1.2.10).

ii) Veure que $A$ és tancat és veure que per a tot parell de successions $u_n \to u$ a $E$ i $Au_n \to v$ a $F$, es té que $u \in D(A)$ i $A(u) = v$.

iii) Si $A$ és tancat, aleshores $N(A) = \{u \in D(A) \mid Au = 0\}$ també ho és. Per a qualsevol parell de successions $u_n \to u$ i $Au_n = 0$, tenim que $u \in D(A)$ i $Au = 0$ per ser $A$ tancat.

iv) Si $D(A)$ és dens a $E$ i $A$ és tancat i fitat, aleshores $A$ s'estén de manera única a $\overline{A} \in \mathcal{L}(E, F)$.

**Exemple 1.5.5.** Siguin $E = \mathscr{C}^0[a, b]$ i $D(A) = \mathscr{C}^1[a, b] \subset E$ un subconjunt dens. Per $u \in D(A)$, definim $Au = u'$. Vegem que $A$ és tancat i amb domini dens. Si $u_n \in \mathscr{C}^1[a, b]$, i tenim un parell de successions $u_n \to u$ i $u_n' \to v$ en norma $\mathscr{C}^0$, aleshores, donat

$$u_n(y) - u_m(x) = \int_x^y u_n'(s)\,\mathrm{d}s,$$

la convergència uniforme de $u_n'$ ens assegura que podem prendre límits dins la integral i obtenir

$$u(y) - u(x) = \int_x^y v(s)\,\mathrm{d}s,$$

de manera que $u' = v$.

**Definició 1.5.6.** Si $A\colon D(A) \subset E \to F$ és un operador no fitat amb domini dens, definim

$$D(A^*) = \left\{g \in F' \mid h\colon u \in D(A) \mapsto \langle g, Au\rangle_{F',F} \text{ s'estén a } \tilde{h} \in E'\right\}$$

Per $g \in D(A^*)$ definim $A^*g$ per

$$\langle A^*g, u\rangle_{E',E} = \langle g, Au\rangle_{F',F}$$

per a tota $u \in D(A)$.

**Observació 1.5.7.** Notem que $G(A) \subseteq E \times F$ però que $G(A^*) \subseteq F' \times E'$, i podem identificar $F' \times E'$ amb $E' \times F'$ i amb $(E \times F)'$. En particular,

$$\begin{aligned} J \colon F' \times E' &\to E' \times F' = (E \times F)' \\ (g, f) &\mapsto (-f, g) \end{aligned}$$

és un ismorfisme isomètric, ja que,

$$\|(g, f)\|_{F' \times E'} = \|g\|_{F'} + \|f\|_{E'} = \|g\| + \| - f\|_{E'}.$$

**Proposició 1.5.8.** Siguin $E, F$ espais de Banach i $A \colon D(A) \subset E \to F$ amb domini dens. Aleshores,

$$J(G(A^*)) = G(A)^{\perp}.$$

*Demostració.* Es té que $(g, f) \in G(A^*)$ si per a tota $u \in D(A)$

$$\langle g, Au \rangle = \langle f, u \rangle,$$

és a dir,

$$\langle -f, u \rangle + \langle g, Au \rangle = 0,$$

o, equivalentment, que per a tota $u \in D(A)$

$$(-f, g) \perp (u, Au).$$

Així doncs, $(g, f) \in G(A^*) \iff (-f, g) \in G(A)^{\perp}$. □

**Proposició 1.5.9.** Sigui $A \colon D(A) \subset E \to F$ un operador no fitat, lineal i amb domini dens, però no necessàriament tancat. Aleshores $A^*$ és tancat (amb $D(A*)$ no neccessàriament dens).

*Demostració.* Com hem vist a la proposició 1.5.8,

$$G(A^*) = J^{-1}(G(A)^{\perp}),$$

i per tant és l'antiimatge d'un conjunt tancat per una aplicació contínua, és a dir, és tancat. □

**Definició 1.5.10.** Donat $A \colon D(A) \to F$ operador no fitat, es defineix el rang

$$R(A) = \langle v \in F \mid \exists u \in D(A) \text{ amb } v = Au \rangle.$$

**Teorema 1.5.11.** Sigui $A \colon D(A) \subset E \to F$ operador no fitat tancat amb $D(A)$ dens a $E$. Aleshores

i) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$.

ii) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$.

iii) $\overline{R(A^*)} \subset N(A)^{\perp}$.

iv) $\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}$.

*Demostració.* Notem primer que $J(G(A^*))^{\perp} = G(A)$ fent servir la proposició 1.5.8 i el teorema 1.3.8.i).

i) Si $u \in N(A)$, $u \in D(A)$ i $Au = 0$, és a dir, $(u,0) \in G(A)$, d'on $(u,0) \in J(G(A^*))^\perp$. Altrament dit, per a tota $(g,f) \in G(A^*)$,

$$\langle (-f,g),\,(u,0)\rangle = 0,$$

o $\langle f,u\rangle = 0$, és a dir, $u \in R(A^*)^\perp$. Tots els passos són reversibles, per tant $N(A) = R(A^*)^\perp$.

ii) Si $g \in N(A^*)$, aleshores

$$\begin{cases} g \in D(A^*) \\ A^*g = 0 \end{cases}$$

és a dir, existeix $C > 0$ tal que per a tota $u \in D(A)$

$$\begin{cases} |\langle g, Au\rangle_{F',F}| \leq C\|u\|_E \\ \langle g, Au\rangle = 0 \end{cases}$$

Per tant, només cal demanar la segona condició, o el que és el mateix, $g \in R(A)^\perp$. Tots els passos són reversibles, de manera que $N(A^*) = R(A)^\perp$.

iii) Només cal prendre l'ortogonal a tots dos costats de i) i fer servir el teorema 1.3.8.ii).

iv) Per aquest apartat cal prendre l'ortogonal a ii) i usar el teorema 1.3.8.i).

□

**Corol·lari 1.5.12.** Usant iv), si $R(A)$ és tancat aleshores $v \in R(A)$ si i només si $\langle g,v\rangle = 0$ per a tota $g \in N(A^*)$. És a dir, si $R(A)$ és tancat, l'equació $Au = v$ té solució si i només si $\langle g,v\rangle = 0$ per a tota $g \in N(A^*)$.

# Tema 2

# Espais de Hilbert

## 2.1 Propietats generals

**Definició 2.1.1.** Sigui $H$ un espai vectorial real. Direm que una forma bilineal simètrica $(\cdot,\cdot)\colon H \times H \to \mathbb{R}$ és un producte escalar si $(u,u) \geq 0\ \forall u \in H$ i $(u,u) = 0 \iff u = 0$.

**Lema 2.1.2.**

i) Desigualtat de Cauchy-Schwarz: $|(u,v)| \leq |(u,u)|^{\frac{1}{2}}|(v,v)|^{\frac{1}{2}}$, $\forall u,v \in H$.

ii) $|u| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ és una norma en $H$.

iii) Identitat del paral·lelogram: $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.

*Demostració.*

i) Donat $t \in \mathbb{R}$, com que el producte escalar és definit positiu, se satisfà que $(u+tv, u+tv) \geq 0$. Per binealitat i simetria, es té $t^2(v,v) + 2t(u,v) + (u,u) \geq 0$. Aquesta expressió és una equació de segon grau sobre $t$ sense arrels reals o amb una arrel doble, i per tant el seu discriminant és no positiu. En altres paraules:

$$4(u,v)^2 - 4(u,v)(u,v) \leq 0 \implies |(u,v)| \leq |(u,u)|^{\frac{1}{2}}|(v,v)|^{\frac{1}{2}}.$$

ii) L'única propietat que no és immediata és la desigualtat triangular, que s'obté usant la desigualtat de Cauchy-Schwarz:

$$|u+v|^2 = (u+v,u+v) = (u,u)+2(u,v)+(v,v) \leq |u|^2+2|u||v|+|v|^2 = (|u|+|v|)^2.$$

iii) Es desenvolupa la suma amb la definició de la norma i les propietats del producte escalar. Únicament cal notar que

$$\left.\begin{aligned}(u+v,u+v) = (u,u)+2(u,v)+(v,v)\\(u-v,u-v) = (u,u)-2(u,v)+(v,v)\end{aligned}\right\} \implies |u+v|^2+|u-v|^2 = 2(u,u)+2(v,v).$$

$\square$

**Definició 2.1.3.** Un espai de Hilbert $H$ és un espai vectorial real dotat d'un producte escalar, satisfent que $H$ sigui complet respecte la norma induïda $|\cdot|$.

**Exemple 2.1.4.**

- L'espai $\ell^2$ de les successions de quadrat integrable és de Hilbert amb el producte escalar:
$$(u, v) := \sum_{k \geq 0} u_k v_k.$$

- Més en general, l'espai de funcions $L^2(\Omega)$ és de Hilbert amb el producte escalar:
$$(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)d\mu.$$
L'aplicació anterior està ben definida per la desigualtat de Cauchy-Schwarz:
$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} < \infty.$$
És senzill veure que és, en efecte, un producte escalar, i que la seva norma induïda és la que ja havíem estudiat. En particular, $L^2$ amb la norma induïda és de Banach, i per tant és de Hilbert.

- L'espai de Sobolev d'ordre 1 en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definit per:
$$H^1(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega),\ \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega),\ 1 \leq i \leq n\right\},$$
és de Hilbert amb el producte escalar:
$$(u, v)_{1,\Omega} := \int_\Omega (uv + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} u\, \partial_{x_i} v)d\mu.$$
De fet, l'espai $H^m(\Omega)$, corresponent a les funcions tals que totes les seves derivades parcials fins a ordre $m$ són de $L^2(\Omega)$, és de Hilbert amb el producte escalar anàleg a l'anterior:
$$(u, v)_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u\, D^\alpha v)d\mu.$$

**Teorema 2.1.5.** *Teorema de la projecció sobre un convex tancat.*
Sigui $H$ un espai de Hilbert, i $K \subset H$ un subconjunt convex tancat i no buit. Llavors, per a tot $f \in H$ existeix un únic $u \in K$ tal que:
$$|f - u| = \min_{v \in K}\{|f - v|\}$$
A més, $u$ es caracteritza per les dues propietats següents:

i) $u \in K$.

ii) $(f - u, v - u) \leq 0$, $\forall v \in K$.

S'escriu $P_K f := u$. L'aplicació $P_K$ és contínua de $H$ en $H$, i satisfà $|P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2|$.

*Demostració.* Demostrarem primer l'existència de $u$. Considerem una successió $(v_n)$, amb $v_n \in K$ i tal que
$$d_n := |f - v_n| \to d = \inf_{v \in K} |f - v|.$$

Demostrarem que la successió és de Cauchy, i per tant convergent en $K$. En efecte, aplicant la idenitat del paral·lelogram a $f - v_n$ i $f - v_m$, obtenim:

$$|2f - (v_n + v_m)|^2 + |v_m - v_n|^2 = 2|f - v_n|^2 + 2|f - v_m|^2 = 2(d_n^2 + d_m^2).$$

Ara bé, com que $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ (per convexitat), es té $|f - \frac{v_n+v_m}{2}| \geq d$, i per tant:

$$|v_m - v_n|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2 \to 0.$$

Així, $(v_n)$ convergeix vers a un cert límit $u \in K$ satisfent $|f - u| = d = \inf_{v \in K} |f - v|$.

Vegem ara la caracterització: començarem veient que si per a $u \in K$ es té $|f - u| = \min_{v \in K}\{|f - v|\}$, llavors se satisfan i), ii). Suposem que $v \in K$, i $t \in [0, 1]$. Llavors, per convexitat, $w = (1 - t)u + tv \in K$. D'aquesta manera,

$$|f - u| \leq |f - w| = |(f - u) - t(v - u)|.$$

Aleshores:

$$|f - u|^2 \leq |f - u|^2 - 2t(f - u, v - u) + t^2|v - u|^2,$$

on hem usat la desigualtat de Cauchy-Schwarz així: $-2t(f-u, v-u) \geq -2|f-u||t(v-u)|$. D'aquesta manera, si $t \in (0, 1]$, deduïm que $2(f - u, v - u) \leq t|v - u|^2$. Fent tendir $t \to 0$, deduïm que $(f - u, v - u) \leq 0$, com volíem.

Recíprocament, suposem ara que $u$ satisfà i), ii), i sigui $v \in K$. Es té:

$$\begin{aligned}
|u - f|^2 - |v - f|^2 &= (u - f, u - f) - (v - f, v - f) \\
&= (u - f, u - f) - (u - f, v - f) + (u - f, v - f) - (v - f, v - f) \\
&= (u - f, u - v) + (u - v, v - f) \\
&= (u - f, u - v) + (u - v, u - f) - (u - v, u - v) \\
&= 2(f - u, v - u) - |u - v|^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

on a l'última desigualtat hem usat ii). Llavors, s'ha de tenir $|f - u| \leq |f - v|$, com volíem.

Seguidament, vegem que $u$ és única. Suposem que $u_1, u_2 \in K$ satisfan *ii*), és a dir, $(f - u_i, v_i - u_i) \leq 0$ per a $v_i \in K$, $i \in \{1, 2\}$. En particular, escollint $v_1 = u_2$ i $v_2 = u_1$, queda:

$$\left.\begin{aligned}(f - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2, u_1 - u_2) \leq 0\end{aligned}\right\} \implies ((f - u_2) + (u_1 - f), u_1 - u_2) = |u_1 - u_2|^2 \leq 0,$$

de manera que $u_1 = u_2$.

Finalment, si $u_1 = P_K f_1$ i $u_2 = P_K f_2$, vegem que $|u_2 - u_1| \leq |f_2 - f_1|$ (en particular, $P_K$ és contínua). Similarment a abans, tenim:

$$\left.\begin{aligned}(f_1 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ (f_2 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0\end{aligned}\right\} \implies |u_1 - u_2|^2 + (f_2 - f_1, u_1 - u_2) \leq 0,$$

Usant la desigualtat de Cauchy-Schwarz, deduïm que:

$$|u_1 - u_2|^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \leq |f_1 - f_2||u_1 - u_2|,$$

d'on deduïm la desigualtat demanada. □

**Teorema 2.1.6.** *Teorema de la projecció sobre un subespai tancat.*
Sigui $H$ un espai de Hilbert, i $M \subset H$ un subespai vectorial tancat. Llavors, per a tot $f \in H$ existeix un únic $u \in M$ tal que:

$$|f - u| = \min_{v \in M}\{|f - v|\}$$

A més, $u$ es caracteritza per les dues propietats següents:

i) $u \in M$.

ii) $(f - u, v) = 0$, $\forall v \in M$.

S'escriu $P_M f := u$, on $P_M$ és un operador lineal continu i una projecció que, a més, satisfà $\|P_M\| \leq 1$.

*Demostració.* Només cal comprovar com "s'actualitza" la propietat ii). Suposem primer que $|f-u| = \min_{v\in M}\{|f-v|\}$. Llavors, si $v \in M$, com que $u+v, u-v \in M$, pel teorema anterior se satisfà:

$$\left.\begin{array}{l}(f-u,(u+v)-u) = (f-u,v) \leq 0\\ (f-u,(u-v)-u) = -(f-u,v) \leq 0\end{array}\right\} \implies (f-u,v) = 0.$$

D'altra banda, si se satisfan i), ii) (d'aquest teorema) i es té $v \in M$, com que $v - u \in M$:

$$(f - u, v - u) = 0 \leq 0,$$

i ja hem acabat. $\square$

A l'operador $P_M$ se li diu projecció ortogonal. Els dos teoremes anteriors s'interpreten de forma més natural a través del concepte d'ortogonalitat en espais de Hilbert, que discutim tot seguit:

**Definició 2.1.7.** Sigui $H$ un espai de Hilbert, i $M \subset H$ un subconjunt. Es defineix el subespai ortogonal a $M$ com:

$$M^{\perp} = \{u \in H \mid (u, v) = 0, \forall v \in M\}.$$

Notem que, malgrat la similitud amb el concepte anàleg en espais de Banach, les definicions són diferents (en espais de Banach hem de recórrer a l'espai dual i el seu producte de dualitat). Més endavant, amb el teorema de representació de Riesz-Fréchet (2.2.1), veurem que els dos conceptes són equivalents.

**Proposició 2.1.8.** Si $M \subset H$ és un subespai vectorial tancat, aleshores $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

*Demostració.* Escrivim la definició:

$$(M^{\perp})^{\perp} = \left\{x \in H \mid (x, y) = 0, \forall y \in M^{\perp}\right\}.$$

És clar, llavors, que $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ (de fet, la inclusió és certa en general). Vegem l'altra inclusió. Suposem que $f \in (M^{\perp})^{\perp}$. Llavors, pel teorema 2.1.6, existeix $u \in M$ tal que $(f-u, v) = 0$, $\forall v \in M$; és a dir, $f-u \in M^{\perp}$. Usant les diferents ortogonalitats, observem que:

$$0 = (f, f-u) = (f-u, f-u) + (u, f-u) = \|f-u\|^2,$$

de manera que $f = u \in M$. $\square$

**Exercici 2.1.9.** Demostreu que, més en general, si $S \subset H$ és un subconjunt, llavors:

$$(S^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span}(S)}$$

Tot seguit, presentem un lema purament d'àlgebra lineal:

**Lema 2.1.10.** Sigui $H$ un espai vectorial, i considerem una aplicació lineal $P\colon H \to H$ que també sigui una projecció ($P^2 = P$). Aleshores:

i) $I - P$ també és projecció, i $\mathrm{Im}(I-P) = \ker(P)$.

ii) Tot element $f \in H$ s'expressa de forma única com $f = u_0 + v_0$, amb $u_0 \in \mathrm{Im}\, P$ i $v_0 \in \mathrm{Im}(I-P)$, i es té la fórmula $u_0 = Pf$, $v_0 = (I-P)f$.

*Demostració.*

i) Es té $(I-P)^2 = (I-P)(I-P) = I^2 - P - P + P^2 = I - P$. D'una banda:

$$f \in \ker(P) \implies Pf = 0 \implies (I-P)f = f.$$

De l'altra, si $h = (I-P)g = g - Pg$, es té:

$$h - Ph = (I-P)(g-Pg) = g - Pg \implies \left.\begin{array}{l} Pg - Ph = g - h \\ Pg = g - h \end{array}\right\} \implies Ph = 0.$$

ii) És clar que $f = Pf + (I-P)f$. Només cal veure que aquesta expressió és única. Suposem que $f = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$, amb $u_i \in \mathrm{Im}(P)$, $v_i \in \mathrm{Im}(I-P)$, $i \in \{1,2\}$. Llavors, $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in \mathrm{Im}(P) \cap \ker(P)$. Per tant, per a cert $w \in H$:

$$u_1 - u_2 = P(w) = P^2(w) = P(u_1 - u_2) = 0.$$

□

**Proposició 2.1.11.** Sigui $H$ de Hilbert i $M \subset H$ un subespai vectorial tancat. Aleshores:

i) $M^\perp = \ker P_M$.

ii) $I - P_M = P_{M^\perp}$.

iii) $H = M \oplus M^\perp$. En particular, $M$ admet un suplementari topològic, com havíem esmentat ja a la proposició 1.3.5.

*Demostració.*

i) D'una banda, sabem que per a tot $f \in H$, es té $f - Pf \in M^\perp$, és a dir, $M^\perp \supset \mathrm{Im}(I-P) = \ker(P)$. De l'altra, si $g \in M^\perp$, com que $Pg \in M$, se satisfà:

$$0 = (g, Pg) = (g - Pg, Pg) + (Pg, Pg) = |Pg|^2.$$

ii) Si $f \in H$, per l'apartat anterior: $(I - P_M)f \in M^\perp$. A més, si $g \in M^\perp$:

$$(f - (I-P_M)f, g) = (P_M f, g) = 0.$$

Per la caracterització del teorema 2.1.6, deduïm que $(I - P_M)f = P_{M^\perp} f$.

iii) Pel lema anterior, sabem que $H = \mathrm{Im}\, P_M \oplus \mathrm{Im}(I - P_M)$. No obstant, com que $\mathrm{Im}\, P_M = M$ i $\mathrm{Im}(I-P_M) = \mathrm{Im}\, P_{M^\perp} = M^\perp$, deduïm el resultat.

□

En particular, se satisfà una versió del teorema de Pitàgores: si $f = u + v$, amb $u \in M$ i $v \in M^\perp$, llavors:

$$|f|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) = |u|^2 + |v|^2.$$

## 2.2 Teoremes de representació

**Teorema 2.2.1.** *Teorema de representació de Riesz-Fréchet.*
Sigui $H$ un espai de Hilbert. Aleshores, per a tota $\varphi \in H'$ existeix una única $f \in H$ tal que, per a tota $u \in H$,

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u). \tag{2.1}$$

A més a més, $|f|_H = \|\varphi\|_{H'}$ i l'aplicació $j\colon \varphi \to f$ dóna una identificació isomètrica entre $H'$ i $H$.

*Demostració.* Sigui $M = \varphi^{-1}(0)$, de manera que $M$ és un subespai vectorial tancat. Si $M = H$, aleshores prenent $f = 0$ la conclusió és immediata. En cas contrari, prenem $f_0 \in H$, $f_0 \notin M$. Sigui $f_1 = P_M f_0$, i

$$f = \frac{f_0 - f_1}{|f_0 - f_1|}.$$

Aleshores $|f| = 1$ i per a tota $v \in M$

$$(f, v) = \frac{(f_0 - P_M f_0, v)}{|f_0 - f_1|} = 0.$$

En particular, $f \notin M$, d'on $\langle \varphi, f \rangle \neq 0$. Donada $u \in H$, definim

$$v = u - \frac{\langle \varphi, u \rangle}{\langle \varphi, f \rangle} f,$$

tenim $\langle \varphi, v \rangle = 0$, és a dir, $v \in M$ i per tant

$$0 = (f, v) = (f, u) - \frac{\langle \varphi, u \rangle}{\langle \varphi, f \rangle}(f, f).$$

Reordenant els termes, per a tota $u \in H$,

$$\langle \varphi, u \rangle = \langle \varphi, f \rangle (f, u),$$

d'on $f$ satisfà (2.1). Donada $g$ que també la satisfaci, aleshores

$$|f - g| = (f - g, f - g) = (f, f - g) - (g, f - g) = \langle \varphi, f - g \rangle - \langle \varphi, f - g \rangle = 0,$$

que ens dóna la unicitat de $f$. Finalment,

$$|\langle \varphi, v \rangle| = |(f, u)| \leq |f||u|,$$

i la igualtat s'obté per $u = f$, d'on $\|\varphi\|_{H'} = |f|_H$. □

**Corol·lari 2.2.2.**

i) $j$ indueix una estructura d'espai de Hilbert a $H'$.

ii) Tot espai de Hilbert és reflexiu.

*Demostració.*

i) Per ser $j$ una isometria, podem dotar $H'$ d'un producte escalar mitjançant la identitat de polarització

$$(\phi_1, \phi_2)_{H'} = \frac{1}{4}(\|\phi_1 + \phi_2\|^2_{H'} - \|\phi_1 - \phi_2\|^2_{H'}) = (j(\phi_1), j(\phi_2))_H.$$

ii) Podem identificar $H$ amb $H'$ mitjançant $j$ i anàlogament identificar $H'$ amb $H''$.

□

**Definició 2.2.3.** Diem que una forma bilineal $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ és

i) contínua si existeix una constant $C$ tal que, per a tota $u, v \in H$

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|;$$

ii) coerciva si existeix una constant $\alpha > 0$ tal que, per a tota $v \in H$,

$$\alpha(v,v) \geq \alpha|v|^2.$$

**Teorema 2.2.4.** *Teorema de Lax-Milgram.*
Sigui $H$ un espai de Hilbert i $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal contínua i coerciva (no necessàriament simètrica). Per a tota $\varphi \in H'$, existeix una única $u \in H$ tal que per a tota $v \in H$

$$\langle \varphi, v \rangle = a(u,v). \tag{2.2}$$

A més, si $a$ és simètrica, $u$ es caracteritza per:

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \mid v \in H\right\}.$$

*Demostració.* Fixada $u \in H$, l'aplicació $v \mapsto a(u,v)$ és lineal i contínua, d'on usant Riesz-Fréchet (2.2.1), existeix un únic element a $H$, que denotarem per $Au$, tal que $a(u,v) = (Au, v)$ per a tota $v \in H$. És senzill veure que $A$ és un operador lineal de $H$ a $H$. A més, per a tota $u \in H$, es té

$$|Au|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq C|u||Au|,$$

d'on, dividint per $|Au|$ si $Au \neq 0$, obtenim,

$$|Au| \leq C|u|.$$

És a dir, $|A|$ és contínua. A més,

$$(Au, u) = a(u,u) \geq \alpha|u|^2. \tag{2.3}$$

Sigui $f \in H$ la identificació de $\varphi$ a $H$ altra vegada per Riesz-Fréchet. Demostrar que (2.2) té una única solució és equivalent a demostrar que per a tota $f \in H$ existeix una única $u \in H$ tal que

$$(f, v) = (Au, v) \quad \forall v \in H$$

és a dir, que $Au = f$. Això és precisament demostrar que $A$ és bijectiva. Ara bé, (2.3) ens assegura que $A$ és injectiva. Per a veure que és exhaustiva, veurem que $R(A)$ és tancat i dens. Usant Cauchy-Schwarz també a (2.3) tenim

$$\alpha|v| \leq |Av| \quad \forall v \in H,$$

de manera que per a tota successió de Cauchy $v_n = Au_n$ a $R(A)$,

$$|u_n - u_m| \leq \frac{|Au_n - Au_m|}{\alpha} = \frac{|v_n - v_m|}{\alpha}.$$

Per tant, $\lim v_n = \lim Au_n = A \lim u_n \in R(A)$, és a dir, $R(A)$ és tancat. Finalment, si $v \in H$ satisfà $(Au, v) = 0$ per a tota $u \in H$, aleshores,

$$a(u, v) = (Au, v) = 0 \quad \forall u \in H,$$

d'on $v = 0$, i fent servir el teorema 1.3.8.i), $\overline{R(A)} = (R(A)^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$.

Suposem ara que $a$ és simètrica. Aleshores $a(\cdot,\cdot)$ ens dóna un nou producte escalar sobre $H$. La continuïtat i la coercivitat de $a$ ens asseguren que la norma $a(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$ és equivalent a la norma que ja teníem, per tant $H$ també és de Hilbert amb la norma induïda per $a$. Donada $\varphi \in H'$, si fem servir altra vegada Riesz-Fréchet però aquest cop amb el nou producte escalar $a(\cdot,\cdot)$, existeix un únic $u \in H$ tal que satisfà (2.2). Aleshores de $a(u - v, u - v) \geq 0$ obtenim, desenvolupant els termes,

$$-\frac{1}{2}a(u, u) \leq \frac{1}{2}a(v, v) - a(u, v) \quad \forall v \in H,$$

és a dir,

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H,$$

i la igualtat es dóna només si $v = u$.

$\square$

## 2.3 Suma Hilbertiana. Base Hilbertiana

**Definició 2.3.1.** Sigui $(E_n)$ una successió de subespais tancats d'un espai de Hilbert $H$. Direm que $H$ és la suma Hilbertiana dels $E_n$, i escriurem $H = \bigoplus_n E_n$, si:

- Els espais són mútuament ortogonals, és a dir, si $u \in E_n$, $v \in E_m$ i $n \neq m$, llavors $(u, v) = 0$.
- El subespai vectorial generat per $\cup_n E_n$ és dens en $H$.

**Teorema 2.3.2.** Suposem que $H$ és suma Hilbertiana de $E_n$. Sigui $u \in H$, i sigui $u_n = P_{E_n} u$. Considerem $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Llavors:

i) $\lim_{n\to\infty} S_n = u$.

ii) $|u|^2 = \sum |u_k|^2$ (Identitat de Bessel-Parseval).

Per a demostrar el teorema usarem un lema, que es pot interpretar com una mena de recíproc:

**Lema 2.3.3.** Considerem una successió $(u_n)$ de $H$ tal que $(u_n, u_m) = 0$ si $n \neq m$ i $\sum |u_k|^2 < \infty$. Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, llavors:

i) Existeix $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

ii) $|S|^2 = \sum |u_k|^2$.

*Demostració.* Per a demostrar que $S_n$ és convergent, veurem que és de Cauchy. Com que $\sum |u_k|^2 < \infty$ per a $n, m$ suficientment grans, $n > m$:

$$|S_n - S_m|^2 = (S_n - S_m, S_n - S_m) = \sum_{k=m+1}^{n} |u_k|^2 < \varepsilon.$$

Per tant, existeix $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. El segon apartat es dedueix de:

$$|S_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2,$$

i fent $n \to \infty$. □

*Demostració del teorema 2.3.2.* Utilitzarem el lema per veure que la successió $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ és convergent. D'una banda, per a tot $k$ es pot escriure $u = u_k + v$, on $v \in E_k^\perp$. Llavors, es té $(u, u_k) = |u_k|^2$. Si sumem per $k$, obtenim:

$$(u, S_n) = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 = |S_n|^2.$$

D'aquí es dedueix que:

$$(S_n, S_n) = (u, S_n) \implies (u - S_n, S_n) = 0.$$

D'aquesta manera, concloem que:

$$|u|^2 = (u, S_n) + (u, u - S_n) = |S_n|^2 + (u - S_n, u - S_n) + (S_n, u - S_n) \geq |S_n|^2.$$

En resum, es té la fita $|S_n| \leq |u|$, i per tant $S_n$ tendeix a un cert límit $S$. Tot seguit, identifiquem quin és el límit $S$. Observem que si $v \in E_m$, per a cert $m \leq n$:

$$(u - S_n, v) = (u - u_m, v) - \sum_{k \neq m} (u_k, v) = 0,$$

on el primer terme és zero pel teorema 2.1.6 i el segon terme és zero per ortogonalitat. Així, fent $n \to \infty$:

$$(u - S, v) = 0, \ \forall v \in E_m \implies (u - S, v) = 0, \ \forall v \in F,$$

on $F$ és el subespai vectorial generat pels $E_n$. Això implica que

$$(u - S, v) = 0, \ \forall v \in \overline{F} = H.$$

En particular, posant $v = u - S$, concloem que $S = u$. □

**Definició 2.3.4.** Una successió $(e_n)$ en $H$ és una base Hilbertiana si satisfà les següents propietats:

i) Ortonormalitat: $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$.

ii) El subespai vectorial generat pels $e_n$ és dens en $H$.

**Teorema 2.3.5.** Tot espai de Hilbert separable (i.e. que conté un conjunt numerable dens) admet una base Hilbertiana.

*Demostració.* Sigui $(v_n)$ un conjunt numerable dens de l'espai de Hilbert $H$. Denotem per $F_k$ el subespai vectorial generat per $\{v_1, \dots, v_k\}$. Per a construir la base ortonormal, prenem $e_1$ de $F_1$, tal que tingui norma 1. Llavors, si $F_2 \neq F_1$, llavors existeix un vector $e_2$ de norma 1 i ortogonal a $e_1$ tal que $\{e_1, e_2\}$ genera $F_2$. Inductivament, obtenim una successió $(e_n)$.

Observem que $\cup_{k=1}^{n} F_k$ és dens en $H$, d'on concloem que $(e_n)$ és base Hilbertiana. $\square$

**Corol·lari 2.3.6.** Tot espai de Hilbert separable és isomorf i isomètric amb l'espai $\ell^2$.

*Demostració.* Sigui $(e_n)$ una base ortonormal de l'espai de Hilbert $H$. Observem que pel teorema 2.3.2, tota $u \in H$ es pot escriure de la forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n,$$

amb

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2,$$

ja que $E_n = \langle e_n \rangle$ és suma Hilbertiana de $H$ i $P_{E_n} u = (u, e_n) e_n$. A la vista d'aquest resultat, definim l'aplicació $T\colon H \to \ell^2$, definida per:

$$T(u) = ((u, e_n))_{n \geq 1}\,.$$

L'aplicació està ben definida i és lineal. A més, donada una successió $(\alpha_n) \in \ell^2$, pel lema 2.3.3, tindrem que la sèrie

$$\sum_{n \geq 1} \alpha_n e_n$$

convergeix a un cert $u \in H$, tal que $T(u) = (\alpha_n)$. Per tant, com que $T$ és invertible, és bijectiva, i per tant un isomorfisme. A més, és una isometria:

$$|u|^2 = \sum |(u, e_n)|^2 = |T(u)|_{\ell^2}^2.$$

$\square$

# Tema 3

# Espais de Sobolev i problemes de contorn

## 3.1 Espais de Sobolev en dimensió 1

**Definició 3.1.1.** Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert, i sigui $1 \leq p \leq \infty$. Definim l'espai $L^p_{loc}(\Omega)$ com l'espai de les funcions mesurables que restringides a qualsevol compacte $K \subset \Omega$ són de $L^p(K)$.

D'ara en endavant, ens centrarem en l'espai $L^1_{loc}(\Omega)$. Observem que aquests espais contenen moltes més funcions que els espais $L^p$ estàndard: sense anar més lluny, tots els polinomis en $n$ variables pertanyen a $L^1_{loc}(\Omega)$, però cap pertany a $L^1(\Omega)$ (excepte el 0).

**Observació 3.1.2.** La funció $f(x) = 1/x$ no pertany a $L^1_{loc}(I)$ si $I \subset \mathbb{R}$ és un interval obert que contingui $x = 0$. Això és degut a que la singularitat de $x = 0$ no és integrable.

En diverses demostracions d'aquest tema s'usa el concepte de successió regularitzadora. Tot i que s'ha introduït a classe de problemes, en recordem la definició a continuació. Intuïtivament, es tracta de successions que tendeixen a la delta de Dirac.

**Definició 3.1.3.** Una successió regularitzadora és una successió de funcions $\rho_n \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ tal que $\forall n$ compleixen $\rho_n(x) \geq 0$, $\operatorname{supp}(\rho_n) \subset (-1/n, 1/n)$, i $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$.

**Definició 3.1.4.** Donada $u \in L^1_{loc}(I)$ (amb $I \subset \mathbb{R}$ interval), es diu que $g \in L^1_{loc}(I)$ és derivada feble de $u$ (i s'escriu $u' = g$) si

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi$$

per a tota $\varphi \in \mathscr{C}^1_c(I)$. Aquestes funcions $\varphi$ es diuen funcions de prova o de test.

**Observació 3.1.5.** Les dues integrals de la definició existeixen perquè tant $u$ com $g$ són integrables en el suport de $\varphi$, que és compacte. Aquesta definició és una generalització de la fórmula d'integració per parts quan $u \in \mathscr{C}^1(I)$.

**Observació 3.1.6.** A la definició podríem haver pres $\mathscr{C}^\infty_c$ en comptes de $\mathscr{C}^1_c$, i no canviaria res. Si $\varphi \in \mathscr{C}^1_c$ i considerem una successió regularitzadora $\eta_\varepsilon$, llavors $\eta_\varepsilon * \varphi \in \mathscr{C}^\infty_c$ i per a $\varepsilon \to 0$ es té $\eta_\varepsilon\varphi \to \varphi$ en norma $\mathscr{C}^1$.

**Lema 3.1.7.** Sigui $v \in L^1_{loc}(I)$ tal que per a tota $\varphi \in \mathscr{C}^1_c(I)$ es té

$$\int_I v\varphi = 0.$$

Aleshores, $v = 0$ quasi pertot.

La demostració d'aquest lema es troba al llibre de Brézis (corol·lari 4.24, pàgina 110) referenciat a la bibliografia de l'assignatura. No obstant, el presentem perquè serà necessari per a la següent proposició.

**Proposició 3.1.8.**

i) Si $u$ és de classe $\mathscr{C}^1$ a $I \subset \mathbb{R}$, aleshores $\partial_x u$ també és la derivada feble de $u$. També és cert si $u$ és $\mathscr{C}^1$ a trossos a $I$.

ii) Per a tota $u \in L^1_{loc}(I)$, si existeix una derivada feble $g \in L^1_{loc}(I)$ llavors és única.

iii) Si $u \in L^1_{loc}(I)$ i $u'(x) = 0$ quasi per a tota $x \in I$, aleshores existeix $C \in \mathbb{R}$ tal que $u(x) = C$ quasi per a tota $x \in I$.

*Demostració.*

i) Si $u$ és de classe $\mathscr{C}^1$, el resultat és conseqüència de la fórmula d'integració per parts, utilitzant que totes les funcions $\varphi$ s'anul·len als extrems de l'interval. El cas de les funcions $\mathscr{C}^1$ a trossos es deixa com a exercici.

ii) Suposem que $g_1, g_2$ són derivades febles de la funció $u$. Llavors, per la definició, s'hauria de satisfer que
$$\int_I (g_1 - g_2)\varphi = 0$$
per a tota $\varphi \in \mathscr{C}^1_c(I)$. Pel lema anterior, deduïm que $g_1 = g_2$ quasi pertot (és a dir, són la mateixa funció a $L^1_{loc}$).

iii) Considerem una funció $\psi \in \mathscr{C}^1_c(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$. Si sospitem que $u(x) = C$ quasi per tot $x$, aleshores és raonable identificar $C = \int_I u\psi$, com veurem tot seguit.

Sigui $w \in \mathscr{C}^1_c(I)$ una funció qualsevol. Pel lema anterior, ens serà suficient demostrar que
$$\int_I \left( u - \left( \int_I u\psi \right) \right) w = 0.$$
Reordenant els termes, veiem que això és equivalent a
$$\int_I u \left( w - \left( \int_I w \right) \psi \right) = 0.$$
Si aconseguim veure que $h = w - \left( \int_I w \right) \psi$ és la derivada d'una certa funció $\varphi \in \mathscr{C}^1_c(I)$, ja haurem acabat (per la hipòtesi de l'enunciat). D'una banda, $h$ és una funció contínua i amb suport compacte, ja que $w, \psi$ ho són. D'altra banda, hauríem de poder garantir que $\varphi$ s'anul·la als extrems de l'interval, però això ho deduïm de:
$$\int_I h = \int_I w - \left( \int_I w \right) \left( \int_I \psi \right) = 0.$$
Per tant, existeix $\varphi \in \mathscr{C}^1_c(I)$ tal que $\varphi' = h$, i se segueix el resultat.

$\square$

**Exemple 3.1.9.** Considerem la funció $u(x) = \text{sign}(x)$ a l'interval $[-1, 1]$. Suposem que té una derivada feble $u' = g$ en aquest interval. Considerem ara totes les funcions $\varphi$ derivables amb continuïtat però amb suport només a $(-1, 0)$. Llavors, hauríem de tenir:

$$\int_{-1}^{0} (-1)\varphi' = \varphi(-1) - \varphi(0) = 0 = \int_{-1}^{0} g\varphi.$$

Pel lema, hauríem de tenir $g = 0$ (gariebé arreu) en l'interval $(-1, 0)$. Anàlogament, també hauríem de tenir $g = 0$ a $(0, 1)$, és a dir, que $g = 0$ quasi pertot. Però això és una contradicció, ja que existeixen funcions $\varphi$ tal que

$$\int_{-1}^{1} u\varphi' \neq 0,$$

com, per exemple, $\varphi(x) = x^2$. Per tant, $u$ no admet derivada feble.

**Definició 3.1.10.** Sigui $I$ un interval obert (no necessàriament fitat), i $1 \leq p \leq \infty$. Definim l'espai de Sobolev

$$W^{k,p}(I) = \{u \in L^p(I) \text{ tal que } \exists g_i \in L^p(I) | g_i = u^{(i)},\ \forall 1 \leq i \leq k\}$$

Les derivades que apareixen a la definició s'entenen en sentit feble. Per $p = 2$ acostumem a notar $H^1(I) := W^{1,2}(I)$.

En l'espai de Sobolev $W^{1,p}$ definim la norma $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$. A vegades també usarem la norma equivalent $\|u\|'_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$, sobretot en el cas de $H^1$, quan aquesta norma prové del producte escalar $(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$.

En l'espai de Sobolev $W^{k,p}$ definim anàlogament $\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{i=0}^{k} \|u^{(i)}\|_{L^p}$.

**Teorema 3.1.11.** $W^{1,p}$ és un espai de Banach. Si $1 \leq p < \infty$ és separable, i si $1 < p < \infty$ és reflexiu. L'espai $H^1$ és de Hilbert.

*Demostració.* Observem que l'operador $T : W^{1,p} \longrightarrow L^p \times L^p$, tal que $Tu = (u, u')$, és una isometria. Podem mirar-nos $W^{1,p}$ com a subespai de $L^p \times L^p$ mitjançant la identificació isomètrica $T$. Com que $L^p \times L^p$ és un espai de Banach, per veure que $W^{1,p}$ és complet n'hi ha prou amb veure que $T(W^{1,p})$ és un tancat de $L^p \times L^p$.

En efecte, observem que podem identificar $W^{1,p}$ amb

$$\bigcap_{\varphi \in \mathscr{C}_c^1(I)} \left\{(f, g) \in L^p \times L^p | \int_I f\varphi' + g\varphi = 0\right\}$$

Cada un d'aquests conjunts és tancat, perquè és el nucli de la forma lineal $(f, g) \mapsto \int_I f\varphi' + g\varphi$. Així doncs, $W^{1,p}$ vist dins de $L^p \times L^p$ és tancat per ser intersecció de tancats, i per tant és complet.

Igualment, tot subespai tancat d'un espai reflexiu és reflexiu. Com que $L^p \times L^p$ és reflexiu, per $1 < p < \infty$, $W^{1,p}$ també és reflexiu per aquests valors de $p$. Com que $L^p$ és separable per $1 \leq p < \infty$, també ho és $L^p \times L^p$, i com que tot subconjunt d'un espai separable és separable, $W^{1,p}$ és separable per aquests valors de $p$.

$H^1(I)$ és de Hilbert, ja que hem vist que té una norma que prové d'un producte escalar, i és complet amb una norma equivalent. ☐

**Lema 3.1.12.** Sigui $g \in L^p_{loc}(I)$, amb $1 \leq p \leq \infty$, i $y_0 \in I$. Sigui $v(x) = \int_{y_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s$. Aleshores $v$ és contínua i $\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(I)$ es té $\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi$.

*Demostració.* La pròpia definició de $v$ ens garanteix que es contínua. Sigui $I = (a, b)$.

$$\int_I v\varphi' = \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t\right] \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^{y_0} \mathrm{d}x \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^b \mathrm{d}x \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t$$

Aplicant el Teorema de Fubini a cada terme, l'expressió anterior queda

$$-\int_a^{y_0} g(t)\,\mathrm{d}t \int_a^t \varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^b g(t)\,\mathrm{d}t \int_t^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_I g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Així doncs tenim efectivament

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi$$

□

**Teorema 3.1.13.** *Encabiment de Sobolev.*
Sigui $u \in W^{1,p}(I)$, amb $1 \leq p \leq \infty$. Aleshores,

i) $\exists! \tilde{u}$ funció contínua a $\bar{I}$ tal que $u(x) = \tilde{u}(x)$ q.p.t $x \in I$.

ii) $\exists$ una constant $K > 0$ independent de $u$ tal que $\|\tilde{u}\|_{\mathscr{C}(I)} \leq K\|u\|_{W^{1,p}(I)}$.

iii) Si $p < \infty$ i $I$ és no fitat, aleshores $\tilde{u} \to 0$ quan $|x| \to \infty$.

iv) Si $1 < p$, $I$ és fitat i $(u_n)$ és una successió fitada a $W^{1,p}(I)$, aleshores $(\tilde{u_n})$ és equicontínua i fitada, i per tant té una parcial convergent a $\mathscr{C}(\bar{I})$.

*Demostració.*

i) Sigui $u \in W^{1,p}(I)$ i $g = u'$. Definim $v(x) = \int_{y_0}^x g(s)\,\mathrm{d}s$. Pel lema que acabem de veure, $g$ és la derivada de $v$. Aleshores, com que la diferència entre les derivades de $u$ i $v$ és zero, per la proposició 3.1.8, la diferència entre $u$ i $v$ ha de ser una constant g.a. Com que $v$ és contínua fins als extrems, i les constants també, $u = \tilde{u} := v + C$ q.p.t $x \in I$.

ii) Suposem $p < \infty$, i que $I$ és de longitud $l < \infty$. Donats $x, y \in \bar{I}$, tindrem

$$|\tilde{u}(x)| - |\tilde{u}(y)| \leq |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \left|\int_x^y u'(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \int_I |u'(s)|\,\mathrm{d}s = \|u'\|_{L^1(I)}$$

La norma $L^1$ de $u'$ està ben definida perquè, com que $I$ és fitat, $u \in L^p \implies u \in L^1$.

La desigualtat que hem obtingut es pot reescriure com a $|\tilde{u}(x)| \leq |\tilde{u}(y)| + \|u'\|_{L^1(I)}$. Integrem aquesta desigualtat respecte $y$ i obtenim

$$l|\tilde{u}(x)| \leq \|u\|_{L^1(I)} + l\|u'\|_{L^1(I)} \leq \max\{1, l\}(\|u\|_{L^1(I)} + \|u'\|_{L^1(I)})$$

Com que $I$ és fitat, la norma $L^1(I)$ està fitada per la norma $L^p(I)$ amb una constant $K = K(l, p)$ que depèn només de $l$ i de $p$. Això prova el cas en què $I$ és fitat.

Sigui ara $I$ no fitat. Prenem un interval auxiliar $I_1 \subset \bar{I}$ de longitud $l = 1$ tq $x \in I$. Aleshores $I_1$ és fitat i usant que $I_1 \subset I$ tenim

$$|\tilde{u}(x)| \leq K(1, p)\left[\left(\int_{I_1} |u|^p\right)^{1/p} + \left(\int_{I_1} |u'|^p\right)^{1/p}\right] \leq K(1, p)(\|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)})$$

En el cas $p = \infty$ l'argument és el mateix, però s'escriu de manera diferent. Es deixa com a exercici per al lector.

iii) Farem el cas $x \to \infty$. El cas $x \to -\infty$ és anàleg. Prenem l'interval $I_x = [x - 1/2, x + 1/2]$, i usem la desigualtat obtinguda en $(ii)$

$$|\tilde{u}(x)| \leq K(1,p) \left[ \left( \int_{I_x} |u|^p \right)^{1/p} + \left( \int_{I_x} |u'|^p \right)^{1/p} \right]$$

Com que $u, u' \in L^p$, és clar que $\int_{I_x} |u|^p \to 0$ i $\int_{I_x} |u'|^p \to 0$ quan $x \to \infty$. Per tant, efectivament $\tilde{u}(x) \to 0$ quan $x \to \infty$.

iv) Pel teorema d'Arzelà-Ascoli, una successió puntualment fitada i equicontínua definida en un compacte admet una parcial convergent. És clar que $\bar{I}$ és compacte, i per $(ii)$, $(\tilde{u_n})$ és puntualment fitada. Per tant, només ens queda veure l'equicontinuitat. Per hipòtesi $(u_n)$ és fitada en $W^{1,p}$, és a dir, $\exists\, M > 0$ tal que $\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq M$. Aleshores, usant la desigualtat de Hölder, i prenent $x < y$ tenim

$$|\tilde{u}(x)| - |\tilde{u}(y)| \leq \int_x^y |u_n'(s)| \,\mathrm{d}s \leq \left( \int_x^y |u_n'(s)|^p \,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \left( \int_x^y 1^q \,\mathrm{d}s \right)^{1/q} \leq M|x-y|^{1/q}$$

Com que $p > 1$ tenim $q < \infty$ i per tant aquesta desigualtat garanteix l'equicontinuïtat desitjada.

$\square$

**Observació 3.1.14.** El resultat que acabem de demostrar és rellevant. Ens diu que $W^{1,p}$ està encabit dins de $\mathscr{C}(I)$, i a més a més aquest encabiment és continu $(ii)$ i compacte $(iv)$. A més a més, $(iii)$ és un resultat sorprenent, perquè no és cert en $L^p$. A partir d'ara anomenarem sovint $\tilde{u}$ al representant continu de $u$.

**Lema 3.1.15.** Sigui $I = (0,1)$ i sigui $\eta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ una funció qualsevol satisfent

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1/4 \\ 0 & \text{si } x > 3/4 \end{cases}$$

Donada $f$ definida en $I$, anomenem $\tilde{f}$ a la següent funció definida en $(0, \infty)$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Aleshores, donada $u \in W^{1,p}(I)$, es té $\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty)$ i $(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u'}$.

*Demostració.* Sigui $\varphi \in \mathscr{C}_c^1((0,\infty))$. Aleshores,

$$\int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] = \int_0^1 u(\eta\varphi)' - \int_0^1 u\eta'\varphi$$

Com que $\eta\varphi \in \mathscr{C}_c^1((0,1))$, emprant la definició de derivada feble tenim que

$$\int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' = -\int_0^\infty [\tilde{u'}\eta + \tilde{u}\eta']\varphi$$

$\square$

**Teorema 3.1.16.** *Teorema de prolongació.*
Sigui $1 \leq p \leq \infty$. Existeix un operador de prolongació lineal i fitat $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$, no necessàriament únic, tal que $u \mapsto v$, amb $v(x) = v(y)\, \forall x \in I$ i de manera que $\exists C = C(I)$ tal que $\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$, i $\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, on la constant $C$ pot dependre de $I$ però no de $u$. A més a més, si $I$ és fitat, $v$ tindrà suport compacte.

*Demostració.* Vegem en primer lloc el cas en què I és no fitat. Qualsevol interval no fitat i diferent de $\mathbb{R}$ es redueix al cas $I = (0, \infty)$ fent un canvi de coordenades adient. Definim l'extensió per reflexió i veurem que compleix les propietats desitjades.

$$P(u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geq 0 \\ u(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

És clar que $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}$. Observem que la funció $v \in L^p(\mathbb{R})$ definida per

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -u'(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

és la derivada de $P(u)$. En efecte,

$$P(u)(x) - P(u)(0) = \int_0^x v(t)\, \mathrm{d}t \;\forall x \in \mathbb{R}$$

En definitiva, $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ i tenim $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$, amb $C = 2$.

Vegem ara el cas en què l'interval és fitat. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $I = (0, 1)$. Utilitzant la mateixa notació del lema 3.1.15, podem escriure

$$u = \eta u + (1 - \eta)u$$

I podem estendre $\eta u$ a $(0, \infty)$ per $\eta\tilde{u}$, i aleshores a $\mathbb{R}$ en virtut del cas $I = (0, \infty)$ que hem fet en primer lloc.

Així, obtenim una funció $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que estén $\eta u$ a $\mathbb{R}$ i tal que

$$\begin{cases} \|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)} \\ \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \end{cases}$$

Pel mateix procediment, estenem $(1-\eta)u$ a $(-\infty, 1)$ per zero a $(-\infty, 0)$ i després estenem a tot $\mathbb{R}$ per reflexió respecte $x = 1$. D'aquesta manera obtenim $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que estén $(1 - \eta)u$ a $\mathbb{R}$ i tal que

$$\begin{cases} \|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)} \\ \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \end{cases}$$

Aleshores, $Pu = v_1 + v_2$ satisfà les condicions del Teorema. □

A continuació veurem un resultat que ens permetrà aproximar les funcions de $W^{1,p}(I)$ per funcions $\mathscr{C}^\infty$ en un cert sentit. Abans, però, cal introduir alguns conceptes que són necessaris per la demostració. En primer lloc, enunciarem el següent lema sobre convolució, que no demostrarem. La demostració es pot trobar a la pàgina 211 del Brézis.

**Lema 3.1.17.** Sigui $\rho \in L^1(\mathbb{R})$, i $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, amb $1 \leq p \leq \infty$. Aleshores, $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ i $(\rho * v)' = \rho * v'$.

**Definició 3.1.18.** Fixem una funció $\zeta \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ i

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Anomenem funció de truncació a una funció que compleixi aquestes propietats.

Donada una funció de truncació $\zeta$, definim la seqüència $\zeta_n(x) = \zeta(x/n)$. Pel Teorema de la convergència dominada, si $f \in L^p(\mathbb{R})$, aleshores $\zeta_n f \to f$ amb norma $L^p(\mathbb{R})$. Intuïtivament, la successió $\zeta_n$ és una successió que tendeix a la funció constant igual a 1.

**Teorema 3.1.19.** Sigui $u \in W^{1,p}(I)$, amb $1 \leq p < \infty$. Aleshores $\exists$ una successió $(u_n) \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ amb la norma de $W^{1,p}(I)$.

*Demostració.* Usant el teorema de prolongació que acabem de veure, podem suposar que $I = \mathbb{R}$. Prenem ara una successió regularitzadora $\rho_n$, i una funció de truncació $\zeta$. Veurem que la successió $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ convergeix a $u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. En primer lloc, tenim $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$, ja que $u_n - u = \zeta_n((\rho_n * u) - u) + (\zeta_n u - u)$, i, per tant, tal com volíem

$$\|u_n - u\|_{L^p} \leq \|(\rho_n * u) - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \to 0$$

Utilitzant ara el lema 3.1.17 tenim

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u')$$

I, per tant,

$$\|u_n' - u'\|_{L^p} \leq \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p}$$

Per la definició de la seqüència $\zeta_n$, $\|\zeta_n'\|_{L^p} = \|\zeta'\|_{L^p}/n$. Per altra banda, sumant i restant $\zeta_n u'$ i usant la desigualtat triangular, tenim

$$\|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p} = \|\zeta_n(\rho_n * u') - \zeta_n u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p}$$

Així doncs, si anomenem $C = \|\zeta_n'\|_\infty$, i usem que $\zeta_n(x) < 1$, obtenim finalment

$$\|u_n' - u'\|_{L^p} \leq \frac{C}{n}\|u\|_{L^p} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \to 0$$

En definitiva, hem provat que $u_n \to u$ i $u_n' \to u'$ en $L^p$, i per tant, $u_n \to u$ en $W^{1,p}$. $\square$

**Observació 3.1.20.** Aquest resultat pot portar confusió. Cal remarcar que no diu que $u$ pugui aproximar-se per una successió $u_n \in \mathscr{C}_c^\infty(I)$, encara que d'entrada pugui semblar equivalent.

**Corol·lari 3.1.21.** Siguin $u, v \in W^{1,p}(I)$, amb $1 \leq p \leq \infty$. Aleshores, $uv \in W^{1,p}(I)$ i

$$(uv)' = u'v + uv'$$

A més a més, es satisfà la fórmula d'integració per parts, $\forall x, y \in \bar{I}$ tenim

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'$$

*Demostració.* Per l'encabiment de Sobolev, podem suposar $u \in L^\infty(I)$, i per tant $uv \in L^p$. Queda veure doncs que $(uv)' \in L^p$. Considerem en primer lloc el cas $p < \infty$. Siguin $(u_n), (v_n) \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$ seqüències tals que $u_n|_I \to u$, $v_n|_I \to v$ en $W^{1,p}(I)$. Aleshores, de nou per l'encabiment de Sobolev, tenim $u_n|_I \to u$, $v_n|_I \to v$ en $L^\infty(I)$ i en $L^p(I)$.

Per tant, $u_n v_n \to uv$ en $L^\infty(I)$ i també en $L^p(I)$. Així doncs, tenim

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \to u'v + uv'$$

Així doncs, hem que $uv \in W^{1,p}(I)$ i també la regla del producte per la derivació.

Fem ara el cas $p = \infty$. Siguin $u, v \in W^{1,\infty}(I)$. Aleshores $uv \in L^\infty(I)$ i $u'v + uv' \in L^\infty(I)$. Ens queda veure que $u'v + uv'$ és la derivada de $uv$.

Sigui $\varphi \in \mathscr{C}_c^1(I)$, i fixem un interval $J \subset I$ obert i fitat tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset J$. Aleshores, com que $J$ és fitat, $u, v \in W^{1,p}(I)$ $\forall p < \infty$ i pel cas $p < \infty$ que ja hem fet, tenim

$$\int_J uv\varphi' = -\int_J u'v + uv'\varphi$$

I, per tant,

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I u'v + uv'\varphi$$

Integrant la regla del producte obtenim la fórmula d'integració per parts. □

Observem que $\mathscr{C}_c^1(I) \subset W^{1,p}$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$, ja que el suport compacte garanteix que tota funció de $\mathscr{C}_c^1(I)$ i la seva derivada siguin integrables. Això ens permet fer la definició següent:

**Definició 3.1.22.** Sigui $1 \leq p < \infty$. Anomenem $W_0^{1,p}(I)$ a la clausura de $\mathscr{C}_c^1(I)$ en $W^{1,p}(I)$. Si $p = 2$, anomenarem $H_0^1 = W_0^{1,2}$.

$W_0^{1,p}$ és un espai de Banach prenent com a norma la restricció de la norma de $W^{1,p}(I)$ a $W_0^{1,p}(I)$. Anàlogament, l'espai $H_0^1$ és un espai de Hilbert amb la restricció del producte escalar de $H^1(I)$. Observem també que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

**Proposició 3.1.23.** Sigui $u \in W^{1,p}(I)$. Aleshores, $u \in W_0^{1,p}(I)$ si i només si $\tilde{u}$ s'anul·la als extrems.

*Demostració.* Si $u \in W_0^{1,p}(I)$, aleshores $u = \lim_{x\to\infty} \varphi_n$, amb $\varphi_n \in \mathscr{C}_c^1(I)$. Així doncs, les $\varphi_n$ s'anul·len als extrems. Com que avaluar la funció en els extrems és continu, commuta amb el límit i, per tant, $u$ s'anul·la als extrems de $I$.

Recíprocament, suposem que $\tilde{u} \in W^{1,p}$ s'anul·la als extrems. Vegem en primer lloc el cas d'un interval $I$ fitat. Podem estendre $\tilde{u}$ a fora de $I$ per $u_0 \in W_0^{1,p}(\mathbb{R})$

$$u_0 = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Ara aproximem $u_0$ per la successió $u_n(x) = u_0((1 + 1/n)x) \in W_0^{1,p}(I)$, que encongeixen el suport de $u_0$, de manera que són funcions a suport compacte i $\operatorname{supp}(u_n) \subset I$. Regularitzem aquesta successió utilitzant funcions regularitzadores,

$$\rho_{m(n)} * u_0((1 + 1/n)x) \in \mathscr{C}_c^\infty(I) \to u$$

D'aquesta manera, $u$ és limit de funcions $\mathscr{C}_c^\infty$, i per tant $u \in W_0^{1,p}(I)$. El cas en què $I$ és no fitat es pot reduir a $I = (0, \infty)$, i es procedeix de manera similar. □

**Teorema 3.1.24.** *Desigualtat de Poincaré.*
Sigui $I$ un interval fitat. Aleshores existeix una constant $C$ depenent de $|I|$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

*Demostració.* Sigui $I = (a,b)$ i $u \in W_0^{1,p}(I)$. Com que $u(a) = 0$,

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left|\int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \|u'\|_{L^1}$$

Prenent suprems, tenim que $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}$. Com que $I$ és fitat, si $p < q$, $\exists C$ tal que $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$. Aleshores,

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \leq C(\|u'\|_{L^p(I)})$$

□

**Observació 3.1.25.** Com a conseqüència d'aquesta desigualtat, en $W_0^{1,p}(I)$ la norma $\|u'\|_{L^p(I)}$ és equivalent a la norma habitual. A més a més, en $H_0^1$ el producte escalar $\langle u, v\rangle_0 = \int_I u'v'$ dóna un producte escalar equivalent a l'habitual, ja que, donat $0 < \alpha < 1$

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_I u^2 + (u')^2 \geq \int_I (u')^2 \geq \alpha \int_I (u')^2 + \frac{(1-\alpha)}{C}\int_I u^2 \geq \min\left\{\alpha, \frac{(1-\alpha)}{C}\right\}\|u\|_{H_0^1}^2$$

## 3.2 Problemes de contorn en dimensió 1

A continuació presentem una sèrie de problemes de contorn a l'interval $I = (0,1)$. L'anàlisi és vàlid per a qualsevol interval, ja que en tenim prou amb un canvi de variable per reduir-nos a l'interval $(0,1)$. Per a cada problema de contorn farem l'anàlisi següent:

1. Definirem la noció de solució feble del problema.
2. Definirem la noció de solució variacional del problema.
3. Donarem condicions per a l'existència i unicitat de solucions
4. Discutirem propietats de regularitat
5. Si les condicions de contorn són homogènies, definirem l'operador solució i provarem que és lineal i continu.

### Exemple 1

Considerem en primer lloc el següent problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f; \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

**Definició 3.2.1.** Sigui $f \in \mathscr{C}(\bar{I})$. Aleshores, si $u \in \mathscr{C}^2(\bar{I})$ és solució del problema de contorn, diem que $u$ és solució clàssica.

Intentem ara generalitzar aquest problema de contorn. Observem que, si $u$ és una solució clàssica del problema, prenent $\varphi \in \mathscr{C}_c^1(I)$, tenim $\int_I -u''\varphi + \int_I u\varphi = \int_I f\varphi$. Integrem el primer terme per parts. Tenint en compte que el suport de $\varphi$ és compacte, els termes de contorn de la fórmula d'integració per parts s'anul·len, i ens queda

$$\int_I u'\varphi' + \int_I u\varphi = \int_I f\varphi \ \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(I)$$

A més a més, com que les condicions de contorn ens asseguren que $u$ val zero als extrems, $u \in H_0^1(I)$. Aquesta igualtat es pot reescriure com a

$$\langle u, \varphi \rangle_{H_0^1(I)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^1(I)} \ \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(I)$$

Això ens suggereix definir solució feble com $u \in H_0^1(I)$ satisfent aquesta igualtat. No obstant, el plantejament es pot fer una mica més general, seguint les següents observacions:

**Observació 3.2.2.** Com que les funcions de $\mathscr{C}_c^1(I)$ són denses a $H_0^1(I)$, i els funcionals $\langle u, \varphi \rangle_{H_0^1(I)}$ i $\langle f, \varphi \rangle_{L^1(I)}$ són continus en $\varphi$ en la norma de $H_0^1$, demanar que $u$ satisfaci

$$\langle u, \varphi \rangle_{H_0^1(I)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(I)}$$

$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^1(I)$ és equivalent a demanar-ho $\forall \varphi \in H_0^1(I)$.

**Observació 3.2.3.** Quan hem plantejat el problema inicialment, no hem especificat cap condició sobre $f$, si bé en la definició de solució clàssica hem demanat que $f \in \mathscr{C}(\bar{I})$. No obstant, en la formulació feble del problema que hem vist fins al moment, només cal que $f \in L^2(I)$ perquè tingui sentit el producte escalar $\langle f, \varphi \rangle_{L^2(I)}$.

Més en general, podríem substituir $f$ per $F \in H_0^1(I)'$, i el producte escalar pel producte de dualitat $\langle F, \varphi \rangle_{H_0^1(I)', H_0^1(I)}$.

Ara sí, podem arribar a la definició de solució feble amb tota la generalitat necessària.

**Definició 3.2.4.** Donada $F \in H_0^1(I)'$, direm que $u \in H_0^1(I)$ és una solució feble del problema

$$\begin{cases} -u'' + u = F \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

si satisfà la següent igualtat $\forall v \in H_0^1(I)$

$$\langle u, \varphi \rangle_{H_0^1(I)} = \langle F, \varphi \rangle_{H_0^1(I)', H_0^1(I)}.$$

**Observació 3.2.5.** Encara que la nomenclatura ens pot confondre, la definició que hem fet de derivada feble no és equivalent a que $u$ satisfaci $-u'' + u = f$ entenent les $u''$ com a derivades febles.

**Observació 3.2.6.** Atenent a la deducció que hem fet, és clar que tota solució clàssica del problema també és solució feble.

Un cop tenim definida la noció de solució feble (el primer punt que ens havíem proposat), podem observar algunes propietats fonamentals:

**Teorema 3.2.7.** Donada $F \in H_0^1(I)$, existeix una única solució feble $u \in H_0^1(I)$ del problema (3.2). A més, aquesta solució és la que minimitza la forma variacional

$$\frac{1}{2}\int_I \left((v')^2 + v^2\right) - \langle F, v\rangle_{H_0^1(I)', H_0^1(I)},$$

entre totes les $v \in H_0^1(I)$. Addicionalment, $\|u\|_{H_0^1(I)} = \|F\|_{H_0^1(I)'}$, i per tant la dependència de $u$ respecte $F$ és lineal i contínua.

Si el segon terme prové d'una funció $f \in L^2(I)$, tindrem a més que $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ i se satisfarà que $-u'' + u = f$ en el sentit de derivades febles. Si $f \in C(\bar{I})$, $u$ també serà solució clàssica.

*Demostració.* L'existència i unicitat se segueix del teorema de Riesz-Fréchet (2.2.1), i també el fet que $\|u\|_{H_0^1(I)} = \|F\|_{H_0^1(I)'}$. La forma variacional es dedueix del teorema de Lax-Milgram (2.2.4), ja que $\langle u, v\rangle_{H_0^1}$ és una forma bilineal, simètrica, contínua i coerciva.

Pel que fa a la regularitat de la solució, si tenim $f \in L^2(I)$, de la definició de solució feble tindrem:

$$\int_I u'v' = -\int_I (u-f)v; \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Com que $u - f \in L^2(I)$, concloem que $u'$ admet una derivada feble, que és $u - f$, i per tant $u \in H^2(I)$. No detallarem el cas $f \in \mathscr{C}(\bar{I})$. □

Així, hem acabat l'anàlisi que havíem plantejat al principi.

## Exemple 2

Considerem ara la següent variant del problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta \end{cases}$$

Aquest cas es redueix a l'anterior (3.1) escrivint $u = u_0 + v$, on $u_0(x)$ és una funció auxiliar que satisfà les condicions de contorn (per exemple, una recta), i $v$ és una solució de l'equació amb condicions de contorn nul·les.

## Exemple 3

Estudiem el següent problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u = f \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

**Definició 3.2.8.** La funció $u \in H_0^1(I)$ serà solució feble del problema anterior si per a tota $v \in H_0^1(I)$ se satisfà:

$$\int_I p(x)u'v' + \int_I q(x)uv = \int_I fv.$$

El desenvolupament és anàleg a l'anterior. Per a poder aplicar el teorema de Lax-Milgram, necessitem imposar algunes condicions de fitació sobre $p$ i $q$.

**Proposició 3.2.9.** Si les funcions $p(x)$, $q(x)$ són fitades amb $p(x) \geq p_0 > 0$ i $q(x) \geq q_0$, amb $q_0$ positiu o poc negatiu (en un sentit que es precisarà a la demostració), llavors la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_I p(x)u'v' + \int_I q(x)uv$$

és contínua i coerciva.

*Demostració.* Que és contínua es dedueix ràpidament del fet que $p$ i $q$ són fitades i d'aplicar Cauchy-Schwarz amb $u$ i $v$. Pel que fa a la coercivitat:

$$a(v,v) \geq p_0\|v'\|_{L^2}^2 + q_0\|v\|_{L^2}^2 = (p_0 - \varepsilon)\|v'\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|v'\|_{L^2}^2 + q_0\|v\|_{L^2}^2.$$

Aplicant la desigualtat de Poincaré, és a dir, que existeix $C > 0$ tal que $C\|v'\|_{L^2}^2 \geq \|v\|_{L^2}^2$, obtenim:

$$a(v,v) \geq (p_0 - \varepsilon)\|v'\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\varepsilon}{C} + q_0\right)\|v\|_{L^2}^2.$$

Si escollim $\varepsilon > 0$ tal que $p_0 - \varepsilon > \delta > 0$ i $\frac{\varepsilon}{C} + q_0 > \delta > 0$ (admetent així que $q_0$ pugui ser una mica negatiu), acabarem concloent que $a(v,v) > \delta\|v\|_{H^1}^2$, com volíem. □

Si se satisfan les hipòtesis que hem dit, podrem aplicar el teorema de Lax-Milgram per a afirmar que hi haurà existència i unicitat de solucions, i podrem obtenir la forma variacional del problema.

## Exemple 4

Ara, canviem les condicions de contorn per condicions de Neumann:

$$\begin{cases} -u'' + u = f; \\ u'(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta \end{cases} \tag{3.3}$$

Això va diferent. Aquí, en comptes d'imposar les condicions de contorn en l'espai en el que treballem (com fèiem en $H_0^1(I)$), imposarem les condicions dins la mateixa equació. Notem que les condicions $u'(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta$ no tenen sentit a $H^1(I)$ (sí que tindrien sentit a $H^2(I)$, ja que per l'encabiment de Sobolev es pot prendre un representant continu de la derivada).

Suposant que tenim una solució clàssica, si multipliquem l'equació per una funció de prova $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,1])$ (no demanem que s'anul·li als extrems, ja que perdríem les condicions de contorn), s'obté:

$$\alpha\varphi(0) - \beta\varphi(1) + \int_I u'\varphi' + \int_I u\varphi = \int_i f\varphi.$$

Inspirant-nos en això, podem definir solució feble:

**Definició 3.2.10.** Donada $f \in L^2(I)$, una solució feble $u \in H^1(I)$ de l'equació (3.3) és una funció que satisfà

$$\int_I u'v + \int_I uv = -\alpha v(0) + \beta v(1) + \int_i fv,$$

per a tota $v \in H^1(I)$.

El membre de l'esquerra és una forma bilineal, simètrica, contínua i coerciva, i el membre de la dreta és una forma lineal contínua. Per tant, podem aplicar Lax-Milgram per afirmar existència i unicitat de solucions. La forma variacional és que $u$ minimitzi:

$$\frac{1}{2}\int_I \Big((v')^2 + v^2\Big) + \alpha v(0) - \beta v(0) - \int_I fv,$$

per a $v \in H^1(0,1)$.

**Observació 3.2.11.** En comptes de $f \in L^2(I)$, més en general podríem haver pres $\langle F, v\rangle_{(H^1)',H_1}$ per a certa $F \in H^1(I)'$.

Respecte a la regularitat, si suposem que $f \in L^2(I)$ i prenem $v \in \mathscr{C}_c^1(I)$, de la definició de solució feble sortirà que $u'$ té derivada feble $u - f \in L^2(I)$. Falta veure que es compleixen les condicions de contorn (que ara tenen sentit perquè $u \in H^2(I)$). Integrant per parts a la definició de solució feble, tenint en compte que $-u'' + u = f$, obtenim:

$$u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = \alpha v(0) - \beta v(1).$$

Com que $v \in H^1(0,1)$ és arbitrària (i, per tant, $v(0)$ i $v(1)$ també), concloem que $u'(0) = \alpha$ i $u'(1) = \beta$.

## Exemple 5

Un problema "mixt":

$$\begin{cases} -u'' + u = f; \\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

Introduïm un nou espai, el de les funcions que s'anul·len a l'esquerra:

$$H_e^1(a,b) = \Big\{u \in H^1(a,b) \,|\, u(a) = 0\Big\}$$

Treballant en aquest nou espai, es fa com en els casos anteriors.

## Exemple 6

Introduïm ara condicions de tercera classe:

$$\begin{cases} -u'' + u = f; \\ u'(0) - ku(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

D'una banda, treballem en l'espai $H_d^1(I)$ de funcions que s'anul·len en $x = 1$. Suposant que tenim una solució clàssica i multiplicant per una funció de prova $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,1))$, obtenim:

$$u'(0)\varphi(0) + \int_I \Big(u'\varphi' + u\varphi\Big) = \int_I f\varphi.$$

Amb això en ment, i aplicant les condicions de contorn, definim solució feble:

**Definició 3.2.12.** Donada $f \in L^2(I)$, una solució feble $u \in H_d^1(I)$ del problema anterior és tal que:

$$ku(0)v(0) + \int_I \Big(u'v' + uv\Big) = \int_I fv$$

per a tota $v \in H_d^1(I)$.

Si $k \geq 0$, es podrà aplicar el teorema de Lax-Milgram, i es podrà donar la forma variacional corresponent.

## Exemple 7

Posem condicions de contorn periòdiques:

$$\begin{cases} -u'' + u = f; \\ u(0) - u(1) = 0, \ u'(0) - u'(1) = 0 \end{cases}$$

Es treballa amb l'espai de funcions tals que $u(0) = u(1)$, i es procedeix igual que sempre.

## Exemple 8

Comentem finalment un problema una mica diferent, ara en l'interval $I = \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -u'' + Ru' + Ku = f \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

La solució feble serà $u \in H^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\int u'v' + R\int u'v + K\int uv = \int fv,$$

per a tota $v \in H^1(\mathbb{R})$. Notem que el membre de l'esquerra és una forma bilineal contínua en $H^1(\mathbb{R})$, però que no serà simètrica si $R \neq 0$. Serà coerciva si $K > 0$, ja que $\int v'v = 0$ (la primitiva és $v^2$), i

$$\int (v')^2 + K\int v^2 \geq \min\{1, K\}\|v\|_{H^1}.$$

Notem que en no ser una forma simètrica, no admet una forma variacional.

# Índex alfabètic