
COMBINATÒRIA I TEORIA DE GRAFS

ApuntsFME

BARCELONA, OCTUBRE 2020

Autors: Jordi Castellví, Martí Oller.

Última modificació: 6 d'octubre de 2020.

Aquesta obra està subjecta a una llicència de [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) “Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional”.



Índex

1 Geometries finites i quadrats llatins	1
1.1 Sistemes de representants distints	1
Teorema del matrimoni de Hall	1
Teorema de Hall estès	2
1.2 Quadrats llatins	3
1.3 Permanents	3
Conjectura de Van der Waerden	4
1.4 Quadrats llatins mútuament ortogonals	5
1.5 Espais lineals	7
Teorema de De Bruijn-Erdős	8
1.6 Plans projectius	9
Teorema de Bruck-Ryser	9
1.7 Plans afins	10
1.8 Espais projectius	11
2 Enumeració simbòlica. Funcions generadores	13
2.1 Sèries formals de potències	13
2.2 Classes combinatòries	14
2.3 Exemples bàsics	15
2.3.1 Composicions d'enters	15
2.3.2 Particions d'enters	16
2.3.3 Particions de conjunts	17
2.3.4 Camins de Dyck	18
Fórmula d'inversió de Lagrange	18
2.4 Arbres plans	19
2.5 Fórmula d'inversió de Lagrange	19
3 Funcions generadores exponencials	23
3.1 Classes combinatòries etiquetades	23
3.2 Funcions generadores exponencials	23
3.3 Operacions de classes combinatòries etiquetades	24
3.4 Exemples	25
3.4.1 Permutacions	25
3.4.2 Particions d'un conjunt	27
3.4.3 Arbres arrelats etiquetats	28

4	Enumeració amb simetries	29
4.1	Accions d'un grup	29
4.2	Grups actuant en funcions	31
4.3	Polinomi d'índexs de cicles	32
	Teorema de Pólya	33
4.4	Les rotacions del cub	34
4.5	Versió general del teorema de Pólya	35
	Teorema de Pólya generalitzat	36
5	Connectivitat de grafs	39
5.1	Connectivitat per vèrtexs	39
5.2	Estructura de grafs k -connexos	39
	Teorema de Tutte	41
5.3	Teorema de Menger	41
	Teorema local de Menger	41
	Teorema global de Menger	42
	Teorema de Mader	42
	Teorema de Ford-Fulkerson	43
5.4	Connectivitat per arestes	44
6	Aparellaments	45
6.1	Teorema de König	45
	Teorema de König	46
6.2	Teorema de Hall	46
	Teorema del matrimoni de Hall	47
6.3	Aparellaments estables	48
6.4	Teorema de Tutte	49
	Teorema de Tutte	49
7	Planaritat	51
7.1	Preliminars topològics	51
	Teorema de la corba de Jordan	51
	Fórmula d'Euler	51
7.2	Teorema de Kuratowski	52
	Teorema de Kuratowski	52
7.3	Immersions	54
	Teorema de Whitney	54
8	Coloració	57
8.1	Coloració de vèrtexs	57
	Teorema de Szekeres-Wilf	58
	Teorema de Brooks	58
8.2	Grafs planars	59
	Teorema de Grötzsch	60
9	Teoria de grafs extremals	61
9.1	Grafs sense triangles	61
	Teorema de Mantel	61
9.2	Grafs sense subgrafs complets	62

	Teorema de Turán	62
9.3	Teorema d'Erdős-Stone	63
	Teorema d'Erdős-Stone	63
9.4	Grafs sense subgrafs bipartits complets	63
9.5	Grafs sense cicles parells	65
	Índex alfabètic	67

Tema 1

Geometries finites i quadrats llatins

1.1 Sistemes de representants distints

1.1.1. Definició. Sigui X un conjunt finit i siguin $A_1, \dots, A_n \subseteq X$. Diem que la tupla (a_1, \dots, a_n) és un sistema de representants distints (SRD) dels conjunts A_1, \dots, A_n si $a_i \in A_i$.

Sigui $J \subseteq \{1, \dots, n\}$. Denotarem

$$A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

1.1.2. Definició. Sigui X un conjunt finit i siguin $A_1, \dots, A_n \subseteq X$. Diem que A_1, \dots, A_n satisfan la condició de Hall (CH) si, per qualsevol $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, $|A(J)| \geq |J|$.

1.1.3. Teorema del matrimoni de Hall.

Sigui X un conjunt finit. Els subconjunts $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ admeten un SRD si, i només si, satisfan la CH.

Demostració. La implicació directa és trivial. Demostrarem la recíproca per inducció sobre n . En cas base també és trivial. Per demostrar el pas inductiu, distingim entre dos casos

(a) $\nexists J, \emptyset \neq J \subsetneq \{1, \dots, n\}$ tal que $|A(J)| = |J|$.

Com que $|A_n| = |A(\{n\})| \geq |\{n\}| = 1$, existeix algun $a_n \in A_n$. Siguin $A'_i = A_i \setminus \{a_n\}$. Per qualsevol $K \subseteq \{1, \dots, n-1\}$, $K \neq \emptyset$, sigui $A'(K) = \bigcup_{k \in K} A'_k$. Es té que

$$|A'(K)| \geq |A(K)| - 1 \geq |K| + 1 - 1 = |K|.$$

En virtut de la hipòtesi d'inducció, els conjunts A'_1, \dots, A'_{n-1} admeten un SRD (a_1, \dots, a_{n-1}) . Per tant, (a_1, \dots, a_n) és un SRD dels conjunts A_1, \dots, A_n .

(b) $\exists J, \emptyset \neq J \subsetneq \{1, \dots, n\}$ tal que $|A(J)| = |J|$.

Siguin $A_i^* = A_i \setminus A(J)$. Per qualsevol $K \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus J$, $K \neq \emptyset$, sigui

$$A^*(K) = \bigcup_{i \in K} A_i^* = A(J \cup K) \setminus A(J).$$

Es té que

$$|A^*(K)| = |A(J \cup K)| - |A(J)| \geq |J \cup K| - |J| = |K|.$$

En virtut de la hipòtesi d'inducció, els conjunts $\{A_i^* \mid i \in \{1, \dots, n\} \setminus J\}$ admeten un SRD (a_1, \dots, a_r) . Com que $J \neq \{1, \dots, n\}$, podem tornar a fer servir la hipòtesi d'inducció obtenint que els conjunts $\{A_j \mid j \in J\}$ admeten un SRD (a_1, \dots, a_s) . Per com hem construït els conjunts A_i^* , els representants (a_1, \dots, a_r) i (a_1, \dots, a_s) són tots distints, de manera que llur unió (adequadament ordenada) forma una tupla (a_1, \dots, a_n) que és SRD dels conjunts A_1, \dots, A_n .

□

1.1.4. Teorema de Hall estès.

Sigui X un conjunt i siguin $A_1, \dots, A_n \subseteq X$. Si $r \leq n$, $|A_i| \geq r$, $\forall 1 \leq i \leq n$, i els conjunts satisfan la [CH](#), aleshores existeixen, almenys, $r!$ SRD diferents.

Demostració. La demostració es pot fer sobre l'esquema de la demostració anterior. El cas base de la inducció és trivial. Pel pas inductiu, distingim entre els dos mateixos casos.

(a) $\nexists J, \emptyset \neq J \subsetneq \{1, \dots, n\}$ tal que $|A(J)| = |J|$.

Com que $|A_n| \geq r$, podem triar un element $a_n \in A_n$, almenys, d' r maneres diferents. Els conjunts A'_1, \dots, A'_{n-1} són tals que $|A'_i| \geq |A_i| - 1 \geq r - 1$, de manera que tenen, almenys, $(r - 1)!$ SRD diferents, en virtut de la hipòtesi d'inducció. Per tant, obtenim un total d'almenys $r!$ possibilitats.

(b) $\exists J, \emptyset \neq J \subsetneq \{1, \dots, n\}$ tal que $|A(J)| = |J|$.

En aquest cas, $r \leq |A(J)| = |J| < n$. En virtut de la hipòtesi d'inducció, els conjunts $\{A_j \mid j \in J\}$ tenen, almenys, $r!$ SRD diferents, de manera que els conjunts A_1, \dots, A_n també en tenen, almenys, $r!$.

□

1.1.5. Teorema. Sigui X un conjunt i siguin $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ tals que cada element $x \in X$ apareix en exactament r dels subconjunts, i.e. $|\{A_i \mid x \in A_i, 1 \leq i \leq n\}| = r$, i tals que $|A_i| = r$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Aleshores, els subconjunts satisfan la [CH](#).

Demostració. Observem que, necessàriament, $|X| = n$. Sigui $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ i estudiem el cardinal del conjunt $C = \{(j, x) \mid j \in J, x \in A_j\}$. Per una banda, podem triar $j \in J$ de $|J|$ maneres diferents i, aleshores, triar $x \in A_j$ de $|A_j| = r$ maneres diferents, obtenint que

$$|C| = |J|r.$$

Per altra banda, podem triar $x \in A(J)$ de $|A(J)|$ maneres diferents i, a continuació, triar $j \in \{i \mid i \in J, x \in A_i\}$ de $|\{A_i \mid i \in J, x \in A_i\}|$ maneres diferents, de manera que

$$|C| = |A(J)| \left| \{i \mid i \in J, x \in A_i\} \right| \leq |A(J)| \left| \{i \mid 1 \leq i \leq n, x \in A_i\} \right| = |A(J)|r.$$

Concloem que $|A(J)| \geq |J|$.

□

1.2 Quadrats llatins

1.2.1. Definició. Anomenem quadrat llatí d'ordre n a una taula de dimensions $n \times n$, els elements de la qual pertanyen a un conjunt X de mida n i tal que cada $x \in X$ hi apareix exactament una vegada a cada fila i a cada columna.

Convé introduir una notació que farem servir més endavant. Sigui $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ i sigui \circ una aplicació $\circ: X \times X \rightarrow X$. Considerem la taula de dimensions $n \times n$ on l'element de la fila i -èssima i columna j -èssima ve definit per $x_i \circ x_j$. Si aquesta taula és un quadrat llatí, diem que (X, \circ) és un quadrat llatí (d'ordre n).

1.2.2. Definició. Anomenem rectangle llatí a una taula de dimensions $r \times n$, $r \leq n$, els elements de la qual pertanyen a un conjunt X de mida n i tal que cada $x \in X$ hi apareix exactament una vegada a cada fila i, com a molt, una vegada a cada columna.

Donat un rectangle llatí, sovint notarem per $A_i \subseteq X$ el conjunt d'elements que no apareixen a la columna i -èssima i notarem per $M = (m_{ij})$ la matriu

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in A_j \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}.$$

1.2.3. Observació. Donat un rectangle llatí $r \times n$, un SRD dels conjunts A_1, \dots, A_n correspon a una extensió del rectangle llatí a un altre de dimensions $(r+1) \times n$.

1.2.4. Definició. Definim $L(n)$ com el nombre de quadrats llatins d'ordre n .

1.2.5. Teorema.

$$L(n) \geq \prod_{k=1}^n k!.$$

Demostració. Immediat a partir dels teoremes 1.1.4 i 1.1.5. □

1.3 Permanents

1.3.1. Definició. Sigui $M = (m_{ij})$ una matriu de dimensió $n \times n$. Anomenem permanent de la matriu M a

$$\text{perm } M = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)}.$$

1.3.2. Proposició. Siguin $A_1, \dots, A_n \subseteq \{1, \dots, n\}$ i sigui $M = (m_{ij})$ la matriu

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in A_j \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}.$$

Els conjunts A_1, \dots, A_n admeten, exactament, perm M SRD.

Demostració. Per la construcció de M , cada SRD correspon a una permutació $\sigma \in S_n$ tal que el producte $\prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)}$ sigui 1. □

1.3.3. Corol·lari. Un rectangle llatí de dimensions $r \times n$ es pot estendre d'exactament perm M maneres a un rectangle llatí de dimensions $(r+1) \times n$.

1.3.4. Teorema. Sigui M una matriu de dimensions $n \times n$ de zeros i uns amb exactament r uns a cada columna. Es té que

$$\text{perm } M \leq (r!)^{n/r}.$$

1.3.5. Teorema.

$$\prod_{k=1}^n k! \leq L(n) \leq \prod_{k=1}^n (k!)^{\frac{n}{k}}.$$

Demostració. Immediat a partir dels teoremes 1.2.5 i 1.3.4. □

1.3.6. Definició. Anomenem matriu doblement estocàstica a una matriu quadrada de coeficients reals de la qual totes les files i columnes sumen u .

1.3.7. Teorema. *Conjectura de Van der Waerden.*

Sigui M una matriu doblement estocàstica. Aleshores,

$$\text{perm } M \geq \frac{n!}{n^n},$$

i la igualtat s'assoleix si, i només si, tots els coeficients són $\frac{1}{n}$.

1.3.8. Teorema.

$$n^2 \log n - cn^2 \leq \log(L(n)) \leq n^2 \log n.$$

Demostració. Donat un rectangle llatí de dimensions $r \times n$, la matriu $\frac{M}{n-r}$ és una matriu doblement estocàstica, atès que totes les files i columnes tenen $n-r$ uns. Per tant,

$$\text{perm } M = \text{perm} \left(\frac{M}{n-r} \right) (n-r)^n \geq \frac{n! (n-r)^n}{n^n}.$$

Per tant,

$$L(n) \geq \prod_{r=0}^{n-1} \frac{n! (n-r)^n}{n^n} = \frac{(n!)^{2n}}{(n^n)^n}.$$

La fórmula d'Stirling estableix que

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Si l'apliquem, obtenim que

$$L(n) \geq \frac{(n!)^{2n}}{(n^n)^n} \simeq \frac{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right)^{2n}}{(n^n)^n} = \left(\frac{2\pi n \frac{n^{2n}}{e^{2n}}}{n^n} \right)^n = \left(\frac{2\pi n n^n}{e^{2n}} \right)^n.$$

Així,

$$\log(L(n)) \geq n(\log(2\pi n) + n \log n - 2n \log e) \geq n^2 \log n - cn^2,$$

per algun valor c .

Per altra banda, el nombre de matrius de dimensió $n \times n$ amb coeficients d'un conjunt X de mida n és n^{n^2} , i el nombre de quadrats llatins d'ordre n està fitat pel nombre de matrius de dimensió $n \times n$. Obtenim, doncs, que

$$\log(L(n)) \leq \log(n^{n^2}) = n^2 \log n.$$

Les dues desigualtats es resumeixen en el que volíem demostrar:

$$n^2 \log n - cn^2 \leq \log(L(n)) \leq n^2 \log n.$$

□

1.4 Quadrats llatins mútuament ortogonals

1.4.1. Definició. Diem que dos quadrats llatins (G, \circ) i $(G, *)$ són ortogonals si, per tot $(x, y) \in G \times G$, existeix un únic $(g, h) \in G \times G$ tal que $g \circ h = x$ i $g * h = y$.

Diem que un conjunt de quadrats llatins són mútuament ortogonals (QLMO) si són ortogonals dos a dos.

1.4.2. Observació. Fem un breu apunt sobre cossos finits. Si p és un nombre primer, \mathbb{F}_p denota el cos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $f \in \mathbb{F}_p[X]$ és un polinomi irreductible de grau h , aleshores $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ és un cos finit de p^h elements que notem per \mathbb{F}_{p^h} . A més a més, es demostra que tots els cossos finits són isomorfs a algun cos de la forma \mathbb{F}_q , per a cert $q = p^h$, on p és un nombre primer.

1.4.3. Definició. Sigui \mathbb{F}_q un cos finit i sigui $m \in \mathbb{F}_q$. Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} *_{m}: \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q &\rightarrow \mathbb{F}_q \\ (g, h) &\mapsto g *_{m} h = mg + h. \end{aligned}$$

1.4.4. Proposició. Sigui $m \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$. Es té que $(\mathbb{F}_q, *_{m})$ és un quadrat llatí.

Demostració. Posem $x = g *_{m} h = mg + h$. Podem aïllar tant g com h :

$$\begin{aligned} g &= m^{-1}(x - h), \\ h &= x - mg. \end{aligned}$$

D'aquesta manera, si fixem x i una fila (o columna) podem trobar la columna (o fila) on apareix x . \square

1.4.5. Teorema. Siguin $m, j \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ diferents. Els quadrats llatins $(\mathbb{F}_q, *_{m})$ i $(\mathbb{F}_q, *_{j})$ són ortogonals.

Demostració. Suposem que

$$g *_{m} h = g' *_{m} h'$$

i que

$$g *_{j} h = g' *_{j} h'.$$

Voldríem veure que $g = g'$ i que $h = h'$. Podem reescriure les igualtats d'una forma equivalent com

$$\begin{aligned} mg + h &= mg' + h', \\ jg + h &= jg' + h'. \end{aligned}$$

Restant les expressions i simplificant obtenim que $g = g'$, la qual cosa implica que $h = h'$. \square

1.4.6. Definició. Siguin (G, \circ) i (H, \bullet) quadrats llatins. Diem que llur producte és la tupla $(G \times H, \circ\bullet)$, on $\circ\bullet$ és l'aplicació

$$\begin{aligned} \circ\bullet: (G \times H) \times (G \times H) &\rightarrow (G \times H) \\ ((g, h), (g', h')) &\mapsto (g, h) \circ\bullet (g', h') = (g \circ g', h \bullet h'). \end{aligned}$$

1.4.7. Lema. Siguin (G, \circ) i (H, \bullet) quadrats llatins d'ordre m i n , respectivament. Llur producte $(G \times H, \circ\bullet)$ és un quadrat llatí d'ordre nm .

Demostració. Suposem que

$$(g_1, h_1) \circ\bullet (g_2, h_2) = (g_1, h_1) \circ\bullet (g'_2, h'_2).$$

Equivalentment,

$$(g_1 \circ g_2, h_1 \bullet h_2) = (g_1 \circ g'_2, h_1 \bullet h'_2).$$

Com que (G, \circ) i (H, \bullet) són quadrats llatins, deduïm que $g_2 = g'_2$ i que $h_2 = h'_2$, és a dir, que $(g_2, h_2) = (g'_2, h'_2)$. Anàlogament, si suposem que

$$(g_1, h_1) \circ\bullet (g_2, h_2) = (g'_1, h'_1) \circ\bullet (g_2, h_2).$$

deduïm que $(g_1, h_1) = (g'_1, h'_1)$. □

1.4.8. Teorema. Siguin (G, \circ) , (G, \square) , (H, \bullet) i (H, \blacksquare) quadrats llatins tals que els dos primers i els dos darrers són ortogonals entre ells. Aleshores, $(G \times H, \circ\bullet)$ i $(G \times H, \square\blacksquare)$ són quadrats llatins ortogonals.

Demostració. Siguin

$$((g_1, h_1), (g_2, h_2)), \left((g'_1, h'_1), (g'_2, h'_2) \right) \in (G \times H) \times (G \times H)$$

tals que

$$\begin{aligned} (g_1, h_1) \circ\bullet (g_2, h_2) &= (g'_1, h'_1) \circ\bullet (g'_2, h'_2), \\ (g_1, h_1) \square\blacksquare (g_2, h_2) &= (g'_1, h'_1) \square\blacksquare (g'_2, h'_2). \end{aligned}$$

Equivalentment,

$$\begin{aligned} (g_1 \circ g_2, h_1 \bullet h_2) &= (g'_1 \circ g'_2, h'_1 \bullet h'_2), \\ (g_1 \square g_2, h_1 \blacksquare h_2) &= (g'_1 \square g'_2, h'_1 \blacksquare h'_2). \end{aligned}$$

Com que (G, \circ) i (G, \square) són ortogonals, del fet que

$$\begin{aligned} g_1 \circ g_2 &= g'_1 \circ g'_2, \\ g_1 \square g_2 &= g'_1 \square g'_2 \end{aligned}$$

deduïm que $g_1 = g'_1$ i que $g_2 = g'_2$. Anàlogament, $h_1 = h'_1$ i $h_2 = h'_2$. Per tant,

$$((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = \left((g'_1, h'_1), (g'_2, h'_2) \right).$$

□

1.4.9. Corollari. Si existeixen parelles de quadrats llatins ortogonals d'ordres n i m , aleshores existeix una parella de quadrats llatins ortogonals d'ordre nm .

1.4.10. Teorema. Si $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, existeixen dos quadrats llatins ortogonals d'ordre n .

Demostració. Podem escriure $n = 2^h p_1 \cdots p_r$, on els p_i són primers senars. Per a tot primer senar p_i , existeix algun parell de quadrats llatins ortogonals d'ordre p_i en virtut del teorema 1.4.5. El mateix teorema ens garanteix que, si $h \geq 2$, existeixen almenys $2^h - 1 \geq 3$ quadrats llatins ortogonals d'ordre 2^h . Com que, o bé $h = 0$, o bé $h \geq 2$, el teorema 1.4.8 conclou la demostració. \square

Euler va conjecturar que, si $n \equiv 2 \pmod{4}$, no existeixen dos quadrats llatins ortogonals d'ordre n . Aquest problema es va resoldre molts anys després, com afirmen els següents teoremes.

1.4.11. Teorema. No existeixen dos quadrats llatins ortogonals d'ordre 6.

Demostració. Gaston Tarry va completar-ne una demostració exhaustiva el 1901. \square

1.4.12. Teorema. Existeixen quadrats llatins ortogonals de qualsevol ordre $n \geq 3$, tret d' $n = 6$.

Demostració. Parker, Bose, i Shrikhande, 1959. \square

1.4.13. Teorema. Existeixen, com a molt, $n - 1$ quadrats llatins mútuament ortogonals d'ordre n .

Demostració. Sigui N el nombre de quadrats llatins d'ordre N . És clar que podem permutar els elements del conjunt G d'un quadrat llatí (G, \circ) sense pèrdua d'ortogonalitat. Per tant, podem suposar que cadascun dels N quadrats llatins ortogonals d'ordre n té un 1 a la casella superior esquerra. Estudiem els subquadrats de costat $n - 1$ que resulten d'eliminar la primera fila i la primera columna de cadascun dels N quadrats llatins mútuament ortogonals. Per una banda, no és possible que dos d'ells tinguin un 1 a la mateixa casella, ja que es perdria la ortogonalitat, i només hi ha $(n - 1)^2$ caselles disponibles. Per l'altra banda, cadascun d'aquests subquadrats ha de tenir l'1 a $n - 1$ caselles, exactament. Per tant, $N(n - 1) \leq (n - 1)^2$, i concloem que $N \leq n - 1$. \square

1.4.14. Corol·lari. Sigui p un nombre primer i sigui $q = p^r$. Existeixen exactament $q - 1$ quadrats llatins mútuament ortogonals d'ordre q .

Demostració. Immediat a partir dels teoremes 1.4.5 i 1.4.13. \square

1.5 Espais lineals

1.5.1. Definició. Anomenem estructura d'incidència a un parell $\Gamma = (P, L)$ on $L \subseteq \mathcal{P}(P)$. Anomenem punts als elements de P i línies als elements de L .

Per comoditat, farem servir la següent notació. Per a tot punt $p \in P$, sigui

$$r_p = \left| \{l \in L \mid p \in l\} \right|.$$

Per a tota línia $l \in L$, sigui

$$k_l = \left| \{p \in P \mid p \in l\} \right|.$$

1.5.2. Definició. Sigui $\Gamma = (P, L)$ una estructura d'incidència i sigui $\Gamma^* = (L, M)$, on $M = \bigcup_{p \in P} \{l \in L \mid p \in l\}$. Diem que Γ^* és l'estructura d'incidència dual de Γ .

1.5.3. Observació. Sigui Γ una estructura d'incidència. Γ^* és una estructura d'incidència i Γ^{**} és (isomorfa a) Γ .

1.5.4. Definició. Sigui $\Gamma = (P, L)$ una estructura d'incidència. Diem que Γ és un espai lineal si, per tot parell de punts $p, q \in P$, existeix una única línia $l \in L$ tal que $p, q \in l$.

1.5.5. Teorema de De Bruijn-Erdős.

Sigui $\Gamma = (P, L)$ un espai lineal finit tal que $P \not\subseteq L$. Aleshores, $|L| \geq |P|$.

Demostració. Suposem que $|P| \geq |L|$. Considerem $p \in P, l \in L$ tals que $p \notin l$. Per cada punt $q \in l$, existeix una línia que uneix p i q , de manera que

$$\begin{aligned} r_p \geq k_l &\implies |P| r_p \geq |L| k_l \implies \\ &\implies |P||L| - |P| r_p \leq |P||L| - |L| k_l \implies \\ &\implies \frac{1}{|P||L| - |P| r_p} \geq \frac{1}{|P||L| - |L| k_l}. \end{aligned}$$

Tenim que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|P|} \sum_{x \in P} 1 = \frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} \frac{1}{|L| - r_p} \sum_{p \notin l \in L} 1 = \\ &= \sum_{p \notin P} \sum_{p \in l \in L} \frac{1}{|P| (|L| - r_p)} \leq \sum_{p \notin P} \sum_{p \in l \in L} \frac{1}{|L| (|P| - k_l)} = \\ &= \sum_{l \in L} \sum_{l \not\ni p \in P} \frac{1}{|L| (|P| - k_l)} = \frac{1}{|L|} \sum_{l \in L} \frac{1}{|P| - k_l} \sum_{l \not\ni p \in P} 1 = \frac{1}{|L|} \sum_{l \in L} 1 = 1. \end{aligned}$$

Per tant, tenim igualtat arreu i concloem que $|L| \geq |P|$. □

1.5.6. Teorema. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un espai lineal finit tal que $|P| = |L|$. Aleshores, cada parell de línies $l, m \in L$ és concurrent a un punt $p = l \cap m \in P$. Equivalentment, Γ^* és un espai lineal finit.

Demostració. De la demostració del teorema 1.5.5 també es dedueix que, quan $|P| = |L|$, $r_p = k_l$ per tot $p \in P, l \in L$ tals que $p \notin l$. A partir d'aquí, podem distingir dos casos:

1. Existeixen dos punts $p, q \in P$ tals que $r_p \neq r_q$.

En aquest cas, cada línia conté, o bé p , o bé q . Si no fos així, tindríem que $r_p = k_l = r_q$ per a certa $l \in L, p, q \notin l$. Per tant, tots els punts que no són ni p ni q han d'estar alineats i la línia l que els uneix ha de contenir o bé p o bé q (posem p sense pèrdua de generalitat). Com que $|P| = |L|$, hi ha tantes línies diferents de l com punts diferents de p , d'on deduïm que cada parell de línies és concurrent. Naturalment, dues línies no poden ser concurrents a dos punts, ja que per aquell parell de punts sabem que hi passa exactament una línia.

2. Existeix un nombre $n \in \mathbb{N}$ tal que, per tot $p \in P, r_p = n + 1$. Si tots els punts estan alineats, hi ha un sol punt. Altrament, per cada línia $l \in L$, existeix un punt $p \in P$ tal que $p \notin l$. Per tant, $k_l = r_p = n + 1$ i totes les línies contenen $n + 1$ punts. Suposem que dues línies $l, m \in L$ són paral·leles (és a dir, no concurrents). Aleshores, per cada punt $p \in l$ hi passa una línia que l'uneix amb cadascun dels $n + 1$ punts de m , a banda de la pròpia l . Però això fa que $r_p \geq n + 2 > n + 1$, cosa que suposa una contradicció, i concloem que totes les línies són concurrents. □

1.6 Plans projectius

1.6.1. Definició. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un espai lineal. Diem que Γ és un pla projectiu si

- (i) Per tot parell de línies $l, m \in L$, existeix una únic punt $p \in P$ tal que $p \in l, m$.

A més a més, diem que Γ és no degenerat si

- (ii) Existeixen quatre punts de P tals que cap línia $l \in L$ en conté més de dos.

1.6.2. Observació. Sigui Γ un espai lineal. Si Γ^* és un espai lineal, aleshores Γ i Γ^* són plans projectius.

1.6.3. Observació. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un espai lineal finit tal que $|P| = |L|$. El teorema 1.5.6 ens assegura que Γ és un pla projectiu.

1.6.4. Proposició. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un pla projectiu finit no degenerat. Aleshores, existeix un nombre $n \in \mathbb{N}$ tal que $|P| = |L| = n^2 + n + 1$ i tal que totes les línies contenen exactament $n + 1$ punts i per tots els punts passen exactament $n + 1$ línies.

Demostració. Com que un pla projectiu finit és un espai lineal projectiu i sabem que $P \notin L$ perquè Γ és no degenerat, el teorema 1.5.5 ens assegura que $|L| \geq |P|$. A més a més, Γ^* també és un pla projectiu finit no degenerat i, pels mateixos motius, $|P| \geq |L|$. Per tant, $|P| = |L|$. Això, i el fet que Γ és no degenerat, fa que estiguem en el segon cas de la demostració del teorema 1.5.6. Per tant, existeix un cert $n \in \mathbb{N}$ tal que totes les línies tenen $n + 1$ punts i per cada punt passen $n + 1$ línies. Considerem ara una línia qualsevol $l \in L$. Per cadascun dels punts que conté hi passen exactament n línies. Totes aquestes són diferents perquè per cada parella de punts hi passa una sola línia i no n'hi ha més (a banda de l) perquè totes les línies comparteixen algun punt amb l . Per tant, $|P| = |L| = n(n + 1) + 1 = n^2 + n + 1$. \square

1.6.5. Definició. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un pla projectiu finit. Diem que el seu ordre és el nombre $n \in \mathbb{N}$ tal que $|P| = |L| = n^2 + n + 1$.

1.6.6. Teorema de Bruck-Ryser.

Sigui $\Gamma = (P, L)$ un pla projectiu finit d'ordre n tal que $n \equiv 1 \pmod{4}$ o $n \equiv 2 \pmod{4}$. Aleshores, n és la suma de dos quadrats perfectes.

Demostració. Sigui $m = n^2 + n + 1 = |P| = |L|$ i sigui A una matriu de dimensions $m \times m$ indexada per parelles $(p, l) \in P \times L$ definida per

$$A_{pl} = \begin{cases} 1, & \text{si } p \in l, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Com que per cada parell de punts hi passa una sola línia i per cada punt hi passen $n + 1$ rectes,

$$AA^T = nI + J,$$

on J és la matriu de dimensions $m \times m$ on tots els coeficients són uns. Sigui $x = (x_1, \dots, x_m)$ un vector de variables m -dimensional i sigui $z = (z_1, \dots, z_m) = xA$. Tenim que

$$z_1^2 + \dots + z_m^2 = xAA^T x^T = (x_1 + \dots + x_m)^2 + n(x_1^2 + \dots + x_m^2).$$

Sigui x_{m+1} una nova variable i sumem nx_{m+1}^2 a banda i banda:

$$z_1^2 + \cdots + z_m^2 + nx_{m+1}^2 = (x_1 + \cdots + x_m)^2 + n(x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2).$$

El teorema dels quatre quadrats de Lagrange ens assegura que tot nombre natural es pot escriure com a suma de quatre quadrats perfectes. Posem $n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$. A més a més, es té que, per qualssevol $a, b, c, d, w, x, y, z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) &= (aw + bx + cy + dz)^2 \\ &+ (ax - bw + cz - dy)^2 \\ &+ (ay - bz - cw + dx)^2 \\ &+ (az + by - cx - dw)^2. \end{aligned}$$

Posem, doncs,

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2, \\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 + b_8^2) &= c_5^2 + c_6^2 + c_7^2 + c_8^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tenint en compte que $m + 1 \equiv n^2 + n + 2 \equiv 0 \pmod{4}$, podem escriure

$$\begin{aligned} z_1^2 + \cdots + z_m^2 + nx_{m+1}^2 &= (x_1 + \cdots + x_m)^2 + n(x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2) = \\ &= w^2 + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2) = \\ &= w^2 + c_1^2 + \cdots + c_{m+1}^2, \end{aligned}$$

on $w = (x_1 + \cdots + x_m)^2$. Ara podem resoldre¹ $x_j = c_j$, $1 \leq j \leq m$, obtenint

$$nx_{m+1}^2 = w^2 + c_{m+1}^2.$$

Aquesta equació implica que n és la suma de quadrats perfectes². □

1.7 Plans afins

1.7.1. Definició. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un espai lineal. Diem que Γ és un pla afí si, per tot punt $p \in P$ i línia $l \in L$ tals que $p \notin l$, existeix una única línia $m \in L$ tal que $p \in m$ i $l \cap m = \emptyset$. Dit d'una altra manera, per cada punt exterior a una línia hi passa exactament una paral·lela a la línia.

1.7.2. Definició. Definim la relació \sim sobre L com

$$l \sim m \iff l = m \text{ o bé } l \cap m = \emptyset.$$

1.7.3. Observació. \sim és una relació d'equivalència.

¹Els detalls que falten a la demostració es poden trobar a <http://www.maths.qmul.ac.uk/~whitty/LSBU/MathsStudyGroup/ADF-Bruck%20Ryser.pdf>.

²Vegeu la nota 1.

Demostració. Les propietats reflexiva i simètrica són immediates. Comprovem, doncs, la transitòria. Suposem que $l \sim m$, que $m \sim n$, i que $l \not\sim n$. Aleshores, $l \cap n \neq \emptyset$ i podem prendre $p \in l \cap n$. Però, aleshores, o bé tant l com n són línies paral·leles a m que passen per p , o bé $p \in m$, i les dues coses suposarien una contradicció. \square

1.7.4. Teorema. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un pla afí, sigui $E = L/\sim$ i sigui $L^* = L \cup \{l_\infty\}$, on $l_\infty = E$. Aleshores, $\Gamma^* = (P \cup E, L^*)$ és un pla projectiu.

Demostració. Exercici. \square

1.7.5. Corol·lari. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un pla afí. Existeix un nombre natural n tal que cada punt està contingut en $n + 1$ línies, cada línia conté n punts, $|P| = n^2$ i $|L| = n^2 + n$. Diem que Γ té ordre n .

1.7.6. Corol·lari. Sigui $\Gamma = (P, L)$ un pla projectiu i sigui $l \in L$. Aleshores, $\Gamma' = (P \setminus l, L \setminus \{l\})$ és un pla afí.

1.7.7. Teorema. Donats $n - 1$ quadrats llatins mútuament ortogonals d'ordre n , es pot construir un pla afí d'ordre n .

Demostració. En primer lloc, les $n \times n$ caselles faran de punts. Cal definir quines són les línies. Per cada fila i per cada columna, considerem les línies que contenen totes les caselles de la fila o columna. Naturalment, les files (o columnes) són paral·leles entre elles i cada punt pertany a exactament una d'elles. Per cada quadrat llatí, considerem les n línies que resulten d'agrupar les caselles en funció de l'element que contenen. Aquestes n línies també són paral·leles, i cada punt pertany exactament a una d'elles. Com que estem treballant amb quadrats llatins mútuament ortogonals, és impossible que dues línies tinguin més d'un punt en comú. Comptem, ara, les tuples (p, q, l) tals que $p, q \in l \in L$ (on $\Gamma = (P, L)$ és l'estructura d'incidència que acabem de construir). Per cadascuna de les $(n - 1)n + n + n = n^2 + n$ línies, hem de triar dos punts, de manera que

$$|\{(p, q, l) \mid p, q \in l \in L\}| = (n + 1)n \binom{n}{2} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{2} = \binom{n^2}{2}.$$

Concloem, doncs, que cada parell de punts està unit per una sola línia. \square

1.8 Espais projectius

1.8.1. Definició. Sigui $V_k(\mathbb{F}_q)$ l'espai vectorial k -dimensional sobre \mathbb{F}_q . Anomenem espai projectiu de dimensió $n - 1$ sobre \mathbb{F}_q a l'estructura que té, per punts, els subespais 1-dimensionals de $V_k(\mathbb{F}_q)$, per línies, els subespais 2-dimensionals de $V_k(\mathbb{F}_q)$, per plans, els subespais 3-dimensionals de $V_k(\mathbb{F}_q)$, etc., i el notem $PG(k - 1, q)$.

1.8.2. Lema. El nombre de k -tuples de vectors linealment independents de $V_n(\mathbb{F}_q)$ és $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})$.

Demostració. El primer vector pot ser qualsevol tret del zero, el segon pot ser qualsevol tret dels q múltiples del primer, etc. \square

1.8.3. Teorema. El nombre de subespais k -dimensionals de $V_n(\mathbb{F}_q)$ és

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}.$$

Demostració. Una k -tupla de vectors linealment independents de $V_n(\mathbb{F}_q)$ determina un subespai k -dimensional de $V_n(\mathbb{F}_q)$ (numerador), però cal tenir en compte que es poden agafar moltes k -tuples de vectors linealment independents d'aquest subespai (denominador). \square

1.8.4. Definició. Anomenem *spread* a un conjunt de subespais d -dimensionals de $V_{2d}(\mathbb{F}_q)$ que forma una partició dels vectors no nuls de $V_{2d}(\mathbb{F}_q)$.

1.8.5. Exemple. Sigui $q = p^n$, on p és un nombre primer senar. Per cada parell $a, b \in \mathbb{F}_q$, considerem

$$U_{ab} = \langle (1, 0, a, b), (0, 1, b, \eta a^p) \rangle,$$

on $\eta \neq e^2, \forall e \in \mathbb{F}_q$. Considerem, també,

$$U_\infty = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Afirmem que aquests subespais formen un *spread*. Comprovem-ho. Cadascun d'aquests $q^2 + 1$ subespais conté $q^2 - 1$ vectors no nuls, i el nombre de vectors no nuls de $V_{2d}(\mathbb{F}_q)$ és $q^4 - 1 = (q^2 + 1)(q^2 - 1)$. Només cal comprovar, doncs, que els subespais són disjunts. Suposem que $(x, y, \cdot, \cdot) \in U_{ab} \cap U_{a'b'}$, amb $(a, b) \neq (a', b')$. Es té que

$$\begin{cases} xa + yb = xa' + yb' \\ xb + y\eta a^p = xb' + y\eta (a')^p \end{cases}$$

o, equivalentment,

$$\begin{pmatrix} a - a' & b - b' \\ b - b' & \eta(a - a')^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

atès que

$$(a - a')^p \equiv a^p - (a')^p \pmod{p}.$$

Així doncs,

$$\det \begin{pmatrix} a - a' & b - b' \\ b - b' & \eta(a - a')^p \end{pmatrix} = \eta(a - a')^{p+1} - (b - b')^2 = 0.$$

Si $a = a'$, aleshores $b = b'$ i viceversa, però això no pot ser. Aleshores,

$$\eta = \left(\frac{b - b'}{(a - a')^{\frac{p+1}{2}}} \right)^2,$$

la qual cosa suposa una contradicció.

Tema 2

Enumeració simbòlica. Funcions generadores

2.1 Sèries formals de potències

2.1.1. Definició. Donat el conjunt $\mathbb{C}[[z]] = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{(c_0, c_1, c_2, \dots) \mid c_i \in \mathbb{C}\}$ de successions de complexos, es defineix l'anell de sèries formals de potències $(\mathbb{C}[[z]], +, \cdot)$ amb les operacions següents: Si $a = (a_n : n \in \mathbb{N})$ i $b = (b_n : n \in \mathbb{N})$ són successions de complexos, es defineix:

- La seva suma: $a + b = (a_n + b_n : n \in \mathbb{N})$.
- El seu producte: $a \cdot b = (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} : n \in \mathbb{N})$.

En aquest cas, la unitat pel producte és $1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$.

Si fem la identificació $z = (0, 1, 0, 0, \dots)$, aleshores tot $a \in \mathbb{C}[[z]]$ es pot escriure de la forma

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

considerant $a_n = (a_n, 0, 0, \dots)$ i $z^n = (0, 0, \dots, 1, \dots)$, on l'1 de z^n està en la posició n -èsima. També es denota $[z^n]a = a_n$.

2.1.2. Proposició. $a \in \mathbb{C}[[z]]$ és invertible (pel producte) si i només si $a_0 \neq 0$.

Demostració. Si a és invertible, aleshores existeix b tal que $ab = 1$, de manera que $a_0 b_0 = 1$, i per tant $a_0 \neq 0$.

Recíprocament, si $a_0 \neq 0$, volem construir $b = (b_n : n \in \mathbb{N})$ de manera que $ab = 1$. Farem la construcció recursivament, terme a terme:

$$\begin{aligned} a_0 b_0 = 1 &\implies b_0 = a_0^{-1}, \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 &\implies b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0), \\ &\dots \\ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n = 0 &\implies b_n = -a_0^{-1}(a_n b_0 + \dots + a_1 b_{n-1}). \end{aligned}$$

□

2.1.3. Exemple. L'exemple més típic de sèries formals de potències és:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Aquesta notació l'únic que vol dir és que l'invers de $1 - z$ respecte el producte és $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$, com es pot comprovar amb facilitat. També es té:

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!},$$

que des del punt de vista de sèries formals de potències només és una definició, amb la qual se satisfà $e^{z+w} = e^z e^w$.

2.1.4. Exemple. Donada la sèrie

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum a_n z^n,$$

ens preguntem quin són els coeficients a_n . En altres paraules, ens preguntem pel valor de:

$$[z^n](1+z+z^2+\dots) \cdots (1+z+z^2+\dots),$$

on aquest producte té $m+1$ termes idèntics. Això és equivalent a comptar el nombre de solucions de l'equació $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m+1} = n$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Aquest problema és conegut, i dona com a resultat $\binom{n+m}{n}$.

2.2 Classes combinatories

2.2.1. Definició. Una classe combinatoria \mathcal{A} és un conjunt numerable d'objectes, tals que cada objecte té definida una mida:

$$\begin{aligned} |\cdot|: \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto |x|, \end{aligned}$$

de manera que el nombre a_n d'objectes en \mathcal{A} de mida n és finit per a tot n .

2.2.2. Definició. La funció generadora de la classe combinatoria \mathcal{A} és:

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

2.2.3. Exemple.

- i) Els naturals poden ser equipats amb estructura de classe combinatoria definint la mida d'un natural $n \in \mathbb{N}$ com a $|n| = n$. En aquest cas:

$$N(z) = 1 + z + z^2 + \dots$$

- ii) La classe \mathcal{P} de permutacions, on els objectes són permutacions de $[n]$ per a cert n , són una classe combinatoria elegint, per exemple, $|\sigma| = n$:

$$P(z) = 1 + z + 2z^2 + 3!z^3 + \dots$$

2.2.4. Definició. Es poden definir operacions amb classes combinatòries:

1. La suma $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ es defineix com la unió disjunta de \mathcal{A} i \mathcal{B} .
2. El producte $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ és el producte cartesià dels conjunts, amb la mida $|(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$.
3. La seqüència d'una classe combinatòria \mathcal{A} és:

$$\text{Seq}(\mathcal{A}) = \mathcal{E} + \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \dots$$

\mathcal{E} denota una classe amb un únic element de mida zero. Per garantir que $\text{Seq}(\mathcal{A})$ sigui una classe combinatòria, és necessari demanar que $a_0 = 0$.

2.2.5. Proposició.

1. Si $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, aleshores $C_1(z) = A(z) + B(z)$.
2. Si $\mathcal{C}_2 = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, aleshores $C_2(z) = A(z)B(z)$.
3. Si $\mathcal{C}_3 = \text{Seq}(\mathcal{A})$, aleshores $C_3(z) = \frac{1}{1-A(z)}$.

Demostració. La suma és immediata a partir de la definició. Pel que fa al producte:

$$C_2(z) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} z^{|\alpha|+|\beta|} = \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|} \right) \left(\sum_{\beta \in \mathcal{B}} z^{|\beta|} \right) = A(z)B(z).$$

Finalment, per la seqüència:

$$C_3(z) = 1 + A(z) + (A(z))^2 + \dots = \frac{1}{1-A(z)}.$$

□

2.3 Exemples bàsics

2.3.1 Composicions d'enters

2.3.1. Definició. Una composició d'un enter positiu n és una k -tupla (x_1, \dots, x_k) , amb x_i enters positius, tals que $x_1 + \dots + x_k = n$.

Podem construir la classe combinatòria de composicions \mathcal{C} , on els objectes són k -tuples $\alpha = (x_1, \dots, x_k)$ amb $|\alpha| = x_1 + \dots + x_k$. Observem que

$$\mathcal{C} = \text{Seq}(\mathbb{N}),$$

considerant \mathbb{N} sense el zero. Aleshores,

$$C(z) = \frac{1}{1-N(z)} = \frac{1}{1-\frac{z}{1-z}} = \frac{1-z}{1-2z}.$$

Així doncs, comptar el nombre de composicions d'un enter n es redueix a calcular $[z^n]C(z)$. Es té:

$$C(z) = (1-z) \sum_{n \geq 0} 2^n z^n = \sum_{n \geq 0} 2^n z^n - \sum_{n \geq 0} 2^n z^{n+1} = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} z^n.$$

Així, el nombre de composicions de n és 2^{n-1} , com es podria haver obtingut amb arguments directes de caire combinatori.

Amb aquest mateix llenguatge, es poden considerar diferents variants del problema original:

- *De quantes maneres es pot compondre n en exactament k parts?* En aquest cas, la nostra classe és:

$$\mathcal{C}^{(k)} = \mathbb{N}^k \implies C^{(k)}(z) = \left(\frac{z}{1-z} \right)^k.$$

A partir d'aquí, no és difícil veure que $c_n^k = \binom{n-1}{k-1}$.

- *De quantes maneres es pot compondre n amb parts senars?* En aquest cas, la classe dels enters positius senars $2\mathbb{N} + 1$ té com a funció generadora:

$$O(z) = z + z^3 + z^5 + \dots.$$

Així, la classe de composicions en nombres senars satisfà:

$$\mathcal{C}^{(odd)} = \text{Seq}(2\mathbb{N} + 1) \implies C^{(odd)} = \frac{1}{1 - O(z)} = \frac{1 - z^2}{1 - z - z^2}.$$

Es podria obtenir una expressió per la funció generadora descomposant l'obtinguda en fraccions simples.

- *De quantes maneres es pot compondre n en un nombre senar de parts?* Igual que abans, es té:

$$\mathcal{C} = \mathbb{N} + \mathbb{N}^3 + \dots \implies C(z) = N(z) + N(z)^3 + \dots = \frac{N(z)}{1 - N^2(z)} = \frac{\frac{z}{1-z}}{1 - \left(\frac{z}{1-z}\right)}.$$

2.3.2 Particions d'enters

2.3.2. Definició. Una partició d'un enter positiu n és una expressió del tipus $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, amb $1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$, $k \geq 1$.

La classe combinatoria \mathcal{P} de les particions d'enters positius està formada per k -tuples $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, satisfent $1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ i definint la mida com a $|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Observem que les particions estan formades per una seqüència de uns (potser buida), seguida per una seqüència de dosos, de tresos... En altres paraules:

$$\mathcal{P} = \text{Seq}(\{1\}) \times \text{Seq}(\{2\}) \times \dots$$

Per tant,

$$P(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^3} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}.$$

En general, si restringim que els elements de la partició pertanyin a un cert $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$P_A(z) = \prod_{a \in A} \frac{1}{1-z^a}.$$

Es té el següent resultat, obtingut per Schur, que dona una fita asimptòtica de les particions de n amb parts a un cert conjunt finit:

2.3.3. Teorema. Donat $A = \{a_1, \dots, a_M\}$ tal que $\gcd(a_1, \dots, a_M) = 1$, aleshores:

$$[z^n] \prod_{k=1}^M \frac{1}{1 - z^{a_k}} \sim \frac{n^{M-1}}{(M-1)! a_1 \cdots a_M}.$$

Demostració. No es farà la demostració en detall, sinó que es donarà la idea general de la prova. Observem que:

$$(1 - z^{a_k}) = C(1 - z) \left(1 - \frac{z}{w}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{w^{a_k-1}}\right),$$

sent w una arrel a_k -èsima primitiva de la unitat i C una constant. En el producte de tots els $(1 - z^{a_k})$ amb la descomposició donada, 1 hi apareixerà amb multiplicitat exactament M , i la resta d'arrels hi apareixeran amb multiplicitat estrictament menor (per coprimalitat). Així, descomposant en fraccions simples:

$$P_A(z) = \left(\frac{b_{11}}{(1-z)^M} + \cdots + \frac{b_{M1}}{(1-z)} \right) + \left(\frac{b_{12}}{\left(1 - \frac{z}{w}\right)^{\alpha_w}} + \cdots + \frac{b_{\alpha_w 2}}{\left(1 - \frac{z}{w}\right)} \right) + \cdots$$

amb $\alpha_w < M$. Per concloure la demostració, és convenient fer la consideració:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{w}\right)^M} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+M-1}{M-1} z^n$$

i tenir en compte que, per $n \gg M$, $\binom{n+M-1}{M-1} \sim \frac{n^{M-1}}{(M-1)!}$. □

2.3.3 Particions de conjunts

2.3.4. Definició. Una partició d'un conjunt A és una descomposició en subconjunts tal que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Així, si (b_1, \dots, b_k) són els blocs d'una partició de $[n]$, sempre els podem ordenar de manera que $\min b_1 < \min b_2 < \cdots < \min b_k$. De la mateix manera, podem expressar una partició a través d'una paraula $x_1 \dots x_n$, tal que $x_i = b_j \iff i \in b_j$. Per exemple, si $b_1 = \{1, 4, 6\}$, $b_2 = \{2, 3\}$, $b_3 = \{5\}$, la paraula corresponent seria $b_1 b_2 b_2 b_1 b_3 b_1$.

Observem que no totes les paraules són admissibles: $b_1 b_3 b_2 \dots$ no és possible ja que qualsevol aparició de b_{i+1} ha d'estar precedida per una aparició de b_i . Per tant, si Π_k és la classe combinatòria de les particions en k parts, on els elements són paraules formades per b_1, \dots, b_k (i la mida és la longitud de la paraula), es té:

$$\Pi_k = \{b_1\} \times \text{Seq}(\{b_1\}) \times \{b_2\} \text{Seq}(\{b_1, b_2\}) \times \cdots \times \{b_k\} \text{Seq}(\{b_1, \dots, b_k\}).$$

La funció generadora corresponent és:

$$\Pi_k(z) = z \cdot \frac{1}{1-z} \cdot z \cdot \frac{1}{1-2z} \cdots z \cdot \frac{1}{1-kz} = \frac{z^k}{(1-z) \cdots (1-kz)}.$$

2.3.5. Definició. Els nombres de Stirling de segona classe, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, són els coeficients de la funció generadora de Π_k :

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} z^n.$$

En altres paraules, són el nombre particions de $\{1, \dots, n\}$ en k parts.

Hom pot comprovar que

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

2.3.4 Camins de Dyck

2.3.6. Definició. Un camí de Dyck és una seqüència de punts al pla començant a $(0, 0)$ i acabant $(2n, 0)$, amb passes ascendents $\nearrow = (1, 1)$ o descendents $\searrow = (1, -1)$, de manera que tots els punts tenen component y no negativa.

Observem que tots els camins han de començar necessàriament amb un pas \nearrow . Anàlogament, si en algun moment s'arriba a l'origen, s'hi ha d'arribar amb un pas \searrow . Si ens fixem en el camí entre l'origen i la primera vegada que es toca l'eix $\{y = 0\}$, el camí ha de ser una passa \nearrow , seguida per un camí de Dyck, seguida per una passa \searrow . La resta del camí serà un altre camí de Dyck. Així, es pot escriure:

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} + \{\nearrow\} \times \mathcal{D} \times \{\searrow\} \times \mathcal{D}.$$

En altres paraules, un camí de Dyck es pot dividir en dos camins més petits. La funció generadora satisfà:

$$D(z) = 1 + z^2 D^2(z).$$

Una manera d'aïllar $D(z)$ seria a través de resoldre l'equació de segon grau corresponent:

$$D(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}.$$

L'arrel quadrada es pot desenvolupar en sèrie de potències, i raonant que $\lim_{z \rightarrow 0^+} D(z) = 1$, podríem deduir que hauríem d'escollir la solució amb signe negatiu. Una manera més eficient d'obtenir resultats és la fórmula d'inversió de Lagrange:

2.3.7. Teorema. *Fórmula d'inversió de Lagrange.*

Signi ϕ una sèrie formal de potències amb $\phi_0 \neq 0$. Si $Y(z)$ és una sèrie formal de potències satisfent:

$$Y(z) = z\phi(Y(z)),$$

aleshores $[z^n]Y(z) = \frac{1}{n}[t^{n-1}](\phi(t))^n$.

La demostració la farem més endavant. Observem que si $V(z) = zD(z)$, aleshores:

$$V(Z) = z(1 + V^2(z)).$$

Aplicant la fórmula d'inversió de Lagrange amb $\phi(t) = 1 + t^2$:

$$[z^n]V(z) = \frac{1}{n}[t^{n-1}](1 + t^2)^n = \begin{cases} \frac{1}{n} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ és imparell,} \\ 0 & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases}$$

En conseqüència:

$$[z^{2m}]D(z) = \frac{1}{2m} \binom{2m-1}{m} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} = C_m.$$

2.3.8. Definició. El m -èsim nombre de Catalan es defineix com $C_m = \binom{2m}{m}$.

En resum,

$$D(z) = \sum_{m \geq 0} C_m z^{2m}.$$

2.4 Arbres plans

2.4.1. Definició. Un arbre pla és un arbre (graf connex acíclic) dibuixat al pla, arrelat, i tal que l'ordre dels subarbres que pengen de cada node és rellevant.

Sigui \mathcal{T} la classe dels arbres plans, on la mida és el nombre de nodes. Aleshores, se satisfà:

$$\mathcal{T} = \mathcal{N} \times \text{Seq}(\mathcal{T}),$$

sent \mathcal{N} la classe que conté un únic objecte de mida 1 (un únic node). Observem que

$$T(z) = z \frac{1}{1 - T(z)}.$$

Si apliquem la fórmula d'inversió de Lagrange amb $\phi(t) = \frac{1}{1-t}$, obtenim:

$$[z^n]T(z) = \frac{1}{n} [t^{n-1}] \frac{1}{(1-t)^n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}.$$

Per tant, obtenim el $n - 1$ -èsim nombre de Catalan.

2.4.2. Definició. Un arbre binari és un arbre pla tal que cada node té zero o dos fills.

Observem que un arbre binari és o bé un node sol o bé una arrel de la qual pengen dos arbres binaris. Si \mathcal{B} és la classe dels arbres binaris, sent la mida el nombre de vèrtexs interiors (és a dir, els vèrtexs que tenen fills), obtenim:

$$\mathcal{B} = \mathcal{E} + \mathcal{N} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}.$$

Per tant,

$$B(z) = 1 + zB^2(z) \implies (B(z) - 1) = z(1 + (B(z) - 1))^2.$$

Si apliquem la fórmula d'inversió de Lagrange amb $\phi(t) = (1+t)^2$ i amb $B(z) - 1$, obtenim:

$$[z^n]B(z) = \frac{1}{n} [t^{n-1}](1+t)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = C_n.$$

Obtenim altra vegada un nombre de Catalan.

2.4.3. Exercici. Penseu en com podríem construir un isomorfisme entre arbres plans i arbres binaris.

2.5 Fórmula d'inversió de Lagrange

En aquesta secció, demostrarem la fórmula d'inversió de Lagrange. Abans, però, necessitem definir uns conceptes previs:

2.5.1. Definició. Siguin $A(z)$ i $B(z)$ dues sèries formals de potències, amb $b_0 = 0$. La seva composició es defineix com a:

$$A(B(z)) = \sum_{n \geq 0} a_n (B(z))^n.$$

Observem que:

$$[z^m]A(B(z)) = \sum_{n \geq 0} a_n [z^m](B(z))^n = \sum_{n=0}^m a_n [z^m](B(z))^n.$$

Aquesta suma sempre és finita, ja que hem assumit que $b_0 = 0$. Sinó, el càlcul de $[z^0]A(B(z))$ podria donar lloc a una sèrie de nombres complexos, que podria ser divergent.

2.5.2. Definició. Una sèrie (formal) de Laurent és una expressió de la forma:

$$A(z) = \sum_{n \geq -k} a_n z^n = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

per a un cert k .

2.5.3. Proposició. Amb la suma component a component i el producte de convolució, el conjunt de sèries de Laurent (denotat per $\mathbb{C}((z))$) és un cos. De fet, és el cos de fraccions de $\mathbb{C}[[z]]$.

Demostració. Només cal comprovar que tot element diferent del zero té invers pel producte a $\mathbb{C}((z))$. Si $k > 0$, i tenim una sèrie del següent estil:

$$A(z) = \sum_{n \geq k} a_n z^n = z^k (a_k + a_{k+1}z + \dots) = z^k A_1(z),$$

sent $A_1(z)$ invertible en virtut de la proposició 2.1.2. Per tant, si $B_1(z) = \frac{1}{A_1(z)}$ és la inversa, podem escriure:

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{z^k A_1(z)} = \frac{1}{z^k} B_1(z).$$

Per tant, hem trobat una inversa a $A(z)$ en $\mathbb{C}((z))$. Si $A(z)$ no pertany a $\mathbb{C}[[z]]$, el raonament és anàleg. \square

2.5.4. Definició. Donada una sèrie de Laurent $A(z)$, el seu residu és $\text{Res}(A(z)) = [z^{-1}]A(z)$.

2.5.5. Definició. La derivada d'una sèrie formal de potències $A(z) = \sum_{n \geq -k} a_n z^n$ és:

$$A'(z) = \sum_{n \geq -k} n a_n z^{n-1}.$$

Observem que $[z^{-1}]A'(z) = 0a_0 = 0$. És a dir, si una sèrie de Laurent és derivada d'una altra sèrie, aleshores el seu residu és 0.

2.5.6. Lema. Si $A(z) = \sum_{n \geq -k} a_n z^n$, aleshores:

$$\text{Res}\left(\frac{A'(z)}{A(z)}\right) = -k.$$

Demostració. Si $A(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \dots$, aleshores podem escriure:

$$\begin{aligned} A'(z) &= \frac{-k a_k}{z^{k+1}} + \dots \\ \frac{1}{A(z)} &= \frac{1}{a_k z^k} + \dots \end{aligned}$$

Per tant, el coeficient de $[z^{-1}]$ del producte de les sèries serà $-k$, com volíem veure. \square

2.5.7. Teorema. Siguin $A(z), B(z)$ sèries formals de potències amb $a_0 = b_0 = 0, b_1 \neq 0$, tals que

$$A(B(z)) = z.$$

Aleshores:

$$[z^n]A(z) = \frac{1}{n} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(B(z))^n} \right)$$

Demostració. La condició de l'enunciat és:

$$A(B(z)) = \sum_{n \geq 1} a_n (B(z))^n = z.$$

Diferenciant, s'obté:

$$\sum_{n \geq 1} n a_n (B(z))^{n-1} B'(z) = 1.$$

Per a un cert m fixat, dividim els dos costats per $(B(z))^m$:

$$\sum_{n \geq 1} n a_n (B(z))^{n-m-1} B'(z) = \frac{1}{B(z)^m}.$$

Tot seguit, prenem residu als dos membres. Al terme de l'esquerra, observem que si $n \neq m$, llavors $(B(z))^{n-m-1} B'(z) = (B(z)^{n-m})'$ és una derivada, i per tant té residu zero. Si $n = m$, pel lema anterior, $\frac{B'(z)}{B(z)}$ té residu -1 . Per tant,

$$n a_m = \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(B(z))^m} \right),$$

com volíem veure. □

Ara ja estem en condicions de demostrar la fórmula d'inversió de Lagrange, enunciativa a 2.3.7:

Demostració. Suposem que $Y(z) = z\phi(Y(z))$. Aleshores, si $B(t) = \frac{t}{\phi(t)}$, se satisfà $B(Y(z)) = z$. Pel teorema anterior, es té:

$$[z^n]Y(z) = \frac{1}{n} [t^{-1}] \left(\frac{t}{\phi(t)} \right)^n = \frac{1}{n} [t^{n-1}] \frac{1}{\phi(t)^n}.$$

□

Una extensió de la fórmula d'inversió de Lagrange, que no demostrarem aquí, és la fórmula de Bürmann-Lagrange:

2.5.8. Teorema. Sota les condicions de la fórmula d'inversió de Lagrange, si g és una funció analítica, es té:

$$[z^n]g(Y(z)) = \frac{1}{n} [t^{n-1}]g'(t)\phi(t)^n.$$

Tema 3

Enumeració simbòlica. Classes combinatòries etiquetades i funcions generadores exponencials

3.1 Classes combinatòries etiquetades

3.1.1. Definició. Diem que una classe combinatòria \mathcal{A} és etiquetada si tot objecte $\alpha \in \mathcal{A}$, amb $|\alpha| = n$, està compostat per n àtoms distingibles. Equivalentment, podem dir que els àtoms tenen etiquetes del conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$ i que no hi ha dos àtoms amb la mateixa etiqueta. Si $\alpha \in \mathcal{A}$, aleshores $\ell(\alpha)$ denota la tupla de les etiquetes dels seus àtoms.

Sovint es consideren classes combinatòriques etiquetades que tenen per objectes grafs (que tant poden ser dirigits com no dirigits). En aquest cas, els àtoms que conformen un graf són els seus vèrtexs i la mida del graf és el nombre de vèrtex.

Convé considerar la classe nulla ε , que conté un únic objecte de mida zero (i, per tant, sense cap etiqueta) i la classe \mathcal{N} , que conté un únic objecte de mida 1 (i, per tant, amb un sol àtom d'etiqueta 1).

3.1.2. Exemple. 1. La classe \mathcal{U} d'urnes (que contenen boles, per exemple). Els objectes són grafs sense arestes, de manera que $u_n = 1$.

2. La classe \mathcal{P} de permutacions. Els objectes són camins dirigits. Es té que $p_n = n!$.

3. La classe \mathcal{C} de permutacions cícliques. Els objectes són cicles dirigits. Es té que $c_n = (n - 1)!$. Notarem per \mathcal{C}_k la classe de cicles de longitud k .

3.2 Funcions generadores exponencials

3.2.1. Definició. La funció generadora exponencial d'una classe combinatòria \mathcal{A} és

$$A(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Quan es treballa amb classes combinatòries etiquetades, es fan servir les funcions generadores exponencials (FGE) en comptes de les funcions generadores ordinàries (FGO).

3.2.2. Observació. Si $C(z) = A(z)B(z)$,

$$[z^n]C(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

L'expressió $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ s'anomena convolució binomial de (a_n) i (b_n) .

3.3 Operacions de classes combinatories etiquetades

3.3.1. Definició. Sobre les classes combinatories etiquetades també es poden definir les operacions de suma, producte i seqüència, i la operació addicional conjunt.

- La suma $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ de classes combinatories etiquetades es defineix de la mateixa manera, és a dir, com llur unió disjunta $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.
- Per definir el producte etiquetat de dues classes combinatories \mathcal{A} i \mathcal{B} , la idea és associar a cada parell $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ el conjunt de tots els possibles objectes les etiquetes dels quals siguin *coherents* amb les etiquetes $\ell(\alpha)$ i $\ell(\beta)$. Per a fer-ho, convé introduir la següent notació. Donada una tupla $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ de naturals diferents, $\rho(\alpha) = (b_1, \dots, b_n)$ és l'única tupla que preserva l'ordre relatiu i tal que $\{b_1, \dots, b_n\} = \{1, \dots, n\}$.

Ara, donats $\alpha \in \mathcal{A}$ i $\beta \in \mathcal{B}$, definim

$$\alpha * \beta = \left\{ (\alpha', \beta') \mid \rho(c_1, \dots, q_{|\alpha|}) = \ell(\alpha), \rho(q_{|\alpha|+1}, \dots, q_{|\alpha|+|\beta|}) = \ell(\beta) \right\},$$

on

$$(c_1, \dots, q_{|\alpha|+|\beta|}) = \ell((\alpha', \beta')).$$

Finalment, podem definir el producte etiquetat de classes combinatories com

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \bigcup_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \beta \in \mathcal{B}}} \alpha * \beta.$$

- La seqüència $\text{Seq}(\mathcal{A})$ d'una classe combinatoria etiquetada es defineix com

$$\text{Seq}(\mathcal{A}) = \varepsilon + \mathcal{A} + \mathcal{A} * \mathcal{A} + \mathcal{A} * \mathcal{A} * \mathcal{A} + \dots.$$

- El conjunt $\text{Set} \mathcal{A}$ d'una classe combinatoria etiquetada es defineix com

$$\text{Set}(\mathcal{A}) = \varepsilon + \mathcal{A} + \mathcal{A} * \mathcal{A} / \sim_2 + \mathcal{A} * \mathcal{A} * \mathcal{A} / \sim_3 + \dots,$$

on \sim_n és una relació que identifica les n -tuples que només difereixen en l'ordre.

3.3.2. Proposició. Siguen \mathcal{A}, \mathcal{B} i \mathcal{C} classes combinatories etiquetades i siguin $A(x), B(z)$ i $C(z)$ llurs funcions generadores exponencials, respectivament. Aleshores,

- Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, aleshores $C(z) = A(z) + B(z)$.
- Si $\mathcal{C} = \mathcal{A} * \mathcal{B}$, aleshores $C(z) = A(z)B(z)$.

(iii) Si $\mathcal{C} = \text{Seq}(\mathcal{A})$, aleshores $C(z) = \frac{1}{1-A(z)}$.

(iv) Si $\mathcal{C} = \text{Set}(\mathcal{A})$, aleshores $C(z) = e^{A(z)}$.

Demostració.

$$(i) \quad C(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A} + \mathcal{B}} \frac{z^{|\alpha|}}{|\alpha|!} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n + b_n}{n!} z^n = A(z) + B(z).$$

$$(ii) \quad C(z) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} * \mathcal{B}} \frac{z^{|\alpha, \beta|}}{|\alpha, \beta|!} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) z^n = A(z) B(z).$$

$$(iii) \quad C(z) = 1 + A(z) + A(z)^2 + \dots = \frac{1}{1-A(z)}.$$

$$(iv) \quad C(z) = 1 + A(z) + \frac{A(z)^2}{2!} + \frac{A(z)^3}{3!} + \dots = e^{A(z)}.$$

□

3.3.3. Exemple.

1. La classe \mathcal{U} d'urnes té per funció generadora exponencial

$$U(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

2. La classe \mathcal{P} de permutacions té per funció generadora exponencial

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{n!} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

3. La classe \mathcal{C} de permutacions cícliques té per funció generadora exponencial

$$C(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = \log \left(\frac{1}{1-z} \right).$$

3.4 Exemples

3.4.1 Permutacions

Alternativament al que acabem de veure, podem entendre les permutacions com a productes de cicles disjunts, on l'ordre no importa. D'aquesta manera, $\mathcal{P} = \text{Set}(\mathcal{C})$ i

$$P(z) = e^{C(z)} = e^{\log\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{1}{1-z}.$$

3.4.1. Definició. Anomenem desarranjament a una permutació sense punts fixos. Notem per \mathcal{D} la classe de desarranjaments.

Observem que una permutació és un desarranjament si, i només si, la seva descomposició en cicles disjunts no en conté cap de longitud 1. Per tant,

$$\mathcal{D} = \text{Set}(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1),$$

Tenim, doncs, que

$$D(z) = e^{\log\left(\frac{1}{1-z}\right)-z} = \frac{1}{1-z} e^{-z}.$$

A més a més,

$$\begin{aligned} d_n &= n! [z^n] D(z) = n! [z^n] \left((1+z+z^2+\dots) \left(1-z + \frac{(-z)^2}{2!} + \frac{(-z)^3}{3!} + \dots \right) \right) = \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \sim \frac{n!}{e}. \end{aligned}$$

3.4.2. Definició. Anomenem involució a una permutació σ que satisfaci que $\sigma^2 = \text{Id}$. Notem per \mathcal{I} la classe d'involucions.

Observem que una permutació és una involució si, i només si, la seva descomposició en cicles disjunts està formada únicament per cicles de longitud 1 o 2. Per tant,

$$\mathcal{I} = \text{Set}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2).$$

Tenim, doncs, que

$$I(z) = e^{z + \frac{z^2}{2}}.$$

A més a més,

$$\begin{aligned} i_n &= n! [z^n] \left(e^z e^{\frac{z^2}{2}} \right) = n! [z^n] \left(\left(1+z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{\left(\frac{z^2}{2}\right)^2}{2!} + \dots \right) \right) = \\ &= n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k! (n-2k)! 2^k}. \end{aligned}$$

Notem per $\mathcal{P}^{(k)}$ la classe de permutacions que descomposen en k cicles disjunts. Es té que

$$\mathcal{P}^{(k)} = \frac{\overbrace{\mathcal{C} * \dots * \mathcal{C}}^k}{\sim_k}$$

i que

$$P^{(k)}(z) = \frac{1}{k!} C(z)^k = \frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k.$$

Per tant, el nombre de permutacions d' n elements que descomposen en k cicles disjunts és

$$p_n^{(k)} = n! [z^n] \left(\frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^k \right) = \frac{n!}{k!} [z^n] \left(\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \right)^k \right) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right], \quad (3.1)$$

on $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ és el nombre d'Stirling de primera espècie.

3.4.3. Definició. Els nombres de Stirling de primera espècie es defineixen com

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = [x^k] (x(x+1) \cdots (x+n-1)).$$

Es pot comprovar que coincideixen amb el resultat anterior.

3.4.4. Observació.

$$\sum_{k=1}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = n!.$$

Notem per \mathcal{E} la classe de permutacions que descomponen en un nombre parell de cicles. Es té que

$$\mathcal{E} = \varepsilon + \mathcal{C} * \mathcal{C} / \sim_2 + \mathcal{C} * \mathcal{C} * \mathcal{C} * \mathcal{C} / \sim_4 + \dots$$

i que

$$E(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{C(z)^2 k}{(2k)!}.$$

Notem per \mathcal{C}_{even} la classe de permutacions que descomponen en cicles de longitud parella. Es té que

$$\mathcal{C}_{even} = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{2k}}{2k} = \frac{C(z) + C(-z)}{2} = \frac{1}{2} \left(\log \left(\frac{1}{1-z} \right) + \log \left(\frac{1}{1+z} \right) \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{1-z^2} \right).$$

3.4.2 Particions d'un conjunt

3.4.5. Definició. Donat un conjunt finit X , diem que $\{X_1, \dots, X_k\}$ és una partició d' X si els conjunts X_i són disjunts dos a dos i llur unió és X . Sense pèrdua de generalitat, podem considerar que $X = \{1, \dots, n\}$, és a dir, només ens importa el cardinal del conjunt. Notem per \mathcal{P} la classe de particions.

Es té que

$$\mathcal{P} = \text{Set}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0),$$

on $\mathcal{U}_0 = \varepsilon$ és la classe de l'urna buida. Per tant,

$$P(z) = e^{U(z)-1} = e^{e^z-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Els coeficients B_n s'anomenen nombres de Bell. B_n és, per tant, el nombre de particions d'un conjunt d' n elements. Recordem que els nombres d'Stirling de segona espècie $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ calculen el nombre de particions d'un conjunt d' n elements en k conjunts. Així doncs,

$$B_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Tornant a la funció generadora exponencial,

$$\begin{aligned} B_n &= n! [z^n] e^{e^z-1} = \frac{n!}{e} [z^n] e^{e^z} = \frac{n!}{e} [z^n] \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(e^z)^k}{k!} \right) = \\ &= \frac{n!}{e} [z^n] \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{m \geq 0} \frac{(kz)^m}{m!} \right) = \frac{n!}{e} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k! n!} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}. \end{aligned}$$

Notem per \mathcal{P}_k la classe de particions en k parts. Es té que

$$\mathcal{P}_k = \overbrace{(\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0) * \cdots * (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0)}^k / \sim_k$$

i que

$$P_k(z) = \frac{1}{k!} (e^z - 1)^k = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} e^{nz} (-1)^{k-n}.$$

En particular,

$$P_2(z) = \frac{1}{2} (e^z - 1)^2 = \frac{1}{2} (e^{2z} - 2e^z + 1)$$

i

$$(p_2)_n = \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = n! [z^n] \left(\frac{1}{2} (e^{2z} - 2e^z + 1) \right) = \frac{n!}{2} \left(\frac{2^n}{n!} - \frac{2}{n!} \right) = 2^{n-1} - 1.$$

3.4.3 Arbres arrelats etiquetats

3.4.6. Definició. Un arbre arrelat etiquetat és una arbre els nodes del qual són distingibles (és a dir, estan etiquetats) i amb un node destacat, que anomenem arrel. Notem per \mathcal{T} la classe d'arbres arrelats etiquetats.

Es té que

$$\mathcal{T} = \mathcal{N} * \text{Set}(\mathcal{T})$$

i que

$$T(z) = ze^{T(z)}.$$

Aplicant la fórmula d'inversió de Lagrange,

$$t_n = n! [z^n] T(z) = \frac{n!}{n} [t^{n-1}] (e^t)^n = (n-1)! [t^{n-1}] \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(nt)^k}{k!} \right) = n^{n-1}.$$

Tema 4

Enumeració amb simetries

4.1 Accions d'un grup

En aquesta secció repassarem el concepte d'acció d'un grup sobre un conjunt. S'assumirà que el lector està familiaritzat amb els conceptes bàsics de la teoria de grups. Si no fos així, convidem al lector a repassar els apunts d'Estructures Algebraiques, que també contenen part de la teoria que desenvoluparem a continuació.

Atès que principalment estudiarem accions amb el grup simètric (o subgrups seus), al llarg del capítol notarem els elements dels grups amb la notació de permutacions.

4.1.1. Definició. Sigui X un conjunt. Un grup G actua sobre X si per a tot element $\sigma \in G$, hi ha una aplicació de X en X , satisfent que $\sigma(\tau(x)) = (\sigma\tau)(x)$ i $\text{Id}(x) = x$ per a tot $\sigma, \tau \in G$, $x \in X$.

Usarem la mateixa notació per un element $\sigma \in G$ i la seva corresponent aplicació $\sigma: X \rightarrow X$.

4.1.2. Observació. Equivalentment, es pot dir que hi ha un homomorfisme de G a $\text{Sym}(X)$. Observem que totes les aplicacions $\sigma: X \rightarrow X$ són bijectives, amb inversa σ^{-1} .

4.1.3. Exemple. Suposem que $G = \{\text{Id}, \sigma, \sigma^2\}$ i $X = \{a, b\}$. És possible definir una acció tal que $\sigma(a) = b$? Si aquest fos el cas, com que σ és bijectiva, hem de tenir $\sigma(b) = a$. Però, aleshores:

$$\sigma^2(a) = a \implies a = \sigma^3(a) = \sigma(a) = b,$$

arribant a contradicció.

4.1.4. Definició. Per a $x \in X$, l'òrbita de x sota l'acció de G és

$$\text{orb}_G(x) = \{\sigma(x) \mid \sigma \in G\}.$$

Diem que l'acció és transitiva si totes les òrbites són iguals o, equivalentment, quan per a tots $x, y \in X$, existeix $\sigma \in G$ tal que $\sigma(x) = y$.

4.1.5. Exemple. Sigui $\Gamma = K_4$ el graf complet de 4 vèrtexs, i sigui G el grup generat per la permutació (1234). Observem que G actua tant en els vèrtexs de Γ (el vèrtex numerat amb x va a la posició $\sigma(x)$) com en les arestes de Γ (enviant l'aresta xy a l'aresta $\sigma(x)\sigma(y)$).

L'acció de G sobre els vèrtexs és transitiva: cadascuna de les permutacions de G envia cada vèrtex a un vèrtex diferent. En canvi, l'acció sobre les arestes no és transitiva: les òrbites són:

$$\{(12), (23), (34), (14)\}, \{(13), (24)\}.$$

4.1.6. Definició. Suposi's que G actua en X . Per a $\sigma \in G$, definim

$$\text{fix}(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) = x\}.$$

4.1.7. Definició. Per a $x \in X$, definim el subgrup estabilitzador de x com a:

$$G_x = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x\}.$$

Es deixa com a exercici comprovar que G_x és, en efecte, un subgrup de G .

4.1.8. Lema. *Lema d'enumeració d'òrbites.* El nombre d'òrbites diferents de l'acció de G en X és:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)|.$$

Demostració. En primer lloc suposarem que G actua transitivament en X , i després demostrarem el cas general.

En primer lloc, observem que si G actua transitivament, aleshores per a tot $y \in X$ existeix $\sigma \in G$ tal que $\sigma(x) = y$, per a un $x \in X$ donat. Observem també que σG_x és una classe lateral de G_x . Afirmem que hi ha $|X|$ classes laterals de G_x , de la forma σG_x , classificades segons el valor de $\sigma(x)$. En altres paraules, volem veure que $\sigma G_x = \tau G_x \iff \sigma(x) = \tau(x)$. Però es té:

$$\sigma G_x = \tau G_x \iff \sigma^{-1}\tau \in G_x \iff \sigma^{-1}(\tau(x)) = x \iff \tau(x) = \sigma(x).$$

Per tant, hi ha $|X|$ classes laterals de G_x , és a dir, $|X| = \frac{|G|}{|G_x|}$.

A continuació, comptem el nombre de parelles (σ, x) tals que $\sigma(x) = x$ de dues maneres (fixant x o fixant σ), obtenint:

$$\sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|X|} = |G|.$$

Per tant, el lema se satisfà si l'acció és transitiva. Suposem ara que G té òrbites X_1, \dots, X_t . Atès que G actua sobre X_i transitivament, pel cas anterior es té $\sum_{\sigma \in G} |\text{fix}_i(\sigma)| = |G|$, on $\text{fix}_i(\sigma)$ denota els elements de X_i fixos per σ . Aleshores, sumant per a tot i :

$$t|G| = \sum_{i=1}^t \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}_i(\sigma)| = \sum_{\sigma \in G} \sum_{i=1}^t |\text{fix}_i(\sigma)| = \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)|.$$

□

En l'exemple anterior de l'acció de $G = \langle (1234) \rangle$ sobre les arestes de $\Gamma = K_4$, si comptem les arestes fixes per a cada permutació:

G	$ \text{fix}(\sigma) $
Id	6
(1234)	0
(13)(24)	2
(1432)	0

Aplicant el lema, surten $\frac{1}{4}(6 + 0 + 2 + 0) = 2$ òrbites diferents, com hem comprovat anteriorment.

4.1.9. Exemple. Si ara considerem l'acció de $G = \langle (123456) \rangle$ sobre les arestes de $\Gamma = K_6$, podem fer una taula similar:

G	$ \text{fix}(\sigma) $
Id	15
(123456)	0
(135)(246)	0
(14)(25)(36)	3
(153)(264)	0
(165432)	0

Comptant les òrbites amb el lema, surten $\frac{1}{6}(15 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0) = 3$ òrbites diferents.

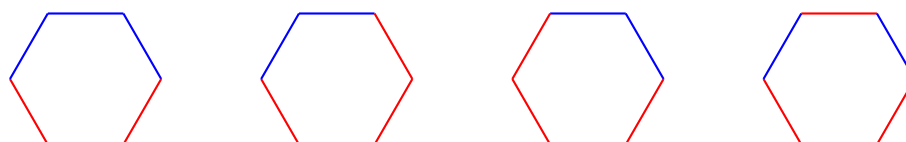
4.2 Grups actuant en funcions

4.2.1. Definició. Una r -coloració d'un conjunt X és una aplicació de X a un conjunt C de r colors. Denotem per C^X aquest conjunt d'aplicacions.

4.2.2. Exemple. Sigui Γ el graf cíclic de 6 vèrtexs. Volem comptar el nombre de formes diferents de 2-colorejar les arestes de Γ que no siguin equivalents respecte l'acció d'algun grup G . Per exemple, si $G = C_6$ és el grup cíclic de 6 elements, totes les coloracions que es puguin obtenir fent una rotació de Γ són equivalents. Si pintem les arestes de color blau o vermell, podem fer el següent recompte:

Arestes blaves	0	1	2	3	4	5	6
Coloracions	1	1	3	4	3	1	1

Sota C_6 , hi ha 14 coloracions en total. Les quatre coloracions pel cas de 3 arestes blaves són les següents:



Si ara considerem $G = D_6$, el grup diedral (és a dir, que admetem rotacions i reflexions), observem que els dos hexàgons centrals són equivalents sota reflexió. La resta queda igual:

Arestes blaves	0	1	2	3	4	5	6
Coloracions	1	1	3	3	3	1	1

En total, hi ha 13 coloracions diferents sota D_6 .

Notem que una acció d'un grup en un graf colorejat no només actua en els vèrtexs i les arestes, sinó que també ho fa de forma natural en els colors. Concretament:

4.2.3. Definició. Suposi's que G actua en X . Per a $\sigma \in G$ i $f \in C^X$, es defineix $\sigma(f)$ com l'element de C^X tal que:

$$\sigma(f(x)) := f(\sigma^{-1}(x)).$$

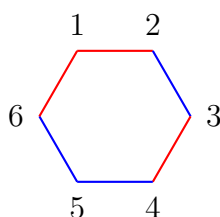
4.2.4. Lema. L'aplicació $f \rightarrow \sigma(f)$ és una acció de G en C^X .

Demostració. D'una banda, $Id(f(x)) = f(Id(x)) = f(x)$. De l'altra:

$$\begin{aligned}\sigma(\tau(f))(x) &= \tau(f)(\sigma^{-1}(x)) = f(\tau^{-1}\sigma^{-1}(x)), \\ (\sigma\tau)(f(x)) &= f((\sigma\tau)^{-1}(x)) = f(\tau^{-1}\sigma^{-1}(x)).\end{aligned}$$

□

4.2.5. Exemple. Considerem el següent hexagon:



Es té que $f((12)) = f((34)) = f((61)) = \text{vermell}$, i $f((23)) = f((45)) = f((56)) = \text{blau}$. Si considerem l'acció de $\sigma = (135)(246)$ sobre el graf, les accions sobre els colors queden de la següent forma:

$$\begin{aligned}(\sigma f)((12)) &= f(\sigma^{-1}(12)) = f((56)) = \text{blau}. \\ (\sigma f)((23)) &= \text{vermell}. \\ (\sigma f)((34)) &= \text{vermell}. \\ (\sigma f)((45)) &= \text{blau}. \\ (\sigma f)((56)) &= \text{vermell}. \\ (\sigma f)((61)) &= \text{blau}.\end{aligned}$$

Visualment, com que després d'aplicar σ , on hi havia l'aresta (12) ara hi haurà l'aresta (56), el color de l'aresta (12) passa a ser el color de l'aresta (56), en aquest cas de vermell a blau.

4.3 Polinomi d'índexs de cicles

Si G actua en X , ens podem mirar G com un subgrup de $\text{Sym}(X)$ i, per tant, podem considerar la seva descomposició en cicles disjunts.

4.3.1. Definició. Per a $\sigma \in G$, definim $c_i^X(\sigma)$ com el nombre de cicles de longitud i en la descomposició de σ .

4.3.2. Definició. El polinomi d'índexs de cicles és:

$$Z_G^X(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \prod_{i=1}^n X_i^{c_i^X(\sigma)},$$

amb $n = |X|$.

4.3.3. Exemple. Considerem l'acció de $G = C_6$ sobre les arestes del graf cíclic de 6 vèrtexs. Atès que $G = \{\text{Id}, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), (165432)\}$, tenim que el polinomi d'índexs de cicles és:

$$Z_{C_6}^X(X_1, \dots, X_6) = \frac{1}{6}(X_1^6 + X_2^3 + 2X_3^2 + 2X_6).$$

4.3.4. Exemple. Considerem ara l'acció de $G = D_6$ sobre les arestes del mateix graf. A part de les rotacions considerades a l'exemple anterior, hem d'afegir les possibles reflexions:

- Podem fer una reflexió a través de dos vèrtexs oposats. En aquest cas, la descomposició serà $\sigma = (..)(..)(..)$, amb multiplicitat 3.
- Podem fer una reflexió a través dels centres de dues arestes oposades. En aquest cas, la descomposició serà $\sigma = (.)(.)(.)(.)$, amb multiplicitat 3.

Així, el polinomi d'índexs de cicles queda:

$$Z_{D_6}^X(X_1, \dots, X_6) = \frac{1}{12}(X_1^6 + 2X_3^2 + 4X_2^3 + 2X_6 + 3X_1^2X_2^2).$$

4.3.5. Teorema. *Teorema de Pólya.*

Suposi's que G actua en X , i sigui C un conjunt de r colors. Aleshores, el nombre de r -coloracions de X diferents sota G és $Z_G^X(r, \dots, r)$.

Demostració. Observem que el nombre de r -coloracions de X diferents sota G és el nombre d'òrbites de G actuant en C^X .

Observem també que una coloració de X queda fixada per σ si en cada cicle en la descomposició de σ , tot element rep el mateix color. Així, $|\text{fix}(\sigma)| = r^{c(\sigma)}$, sent $c(\sigma) = \sum_i c_i^X(\sigma)$ el nombre total de cicles.

Aplicant el lema d'enumeració d'òrbites (4.1.8), s'obté:

$$\text{coloracions} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\text{fix}(\sigma)| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} r^{c(\sigma)} = Z_G^X(r, \dots, r).$$

□

Així, aplicant el teorema als dos exemples anteriors, s'obté que el nombre de 2-coloracions diferents és:

$$Z_{C_6}(2, 2, 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{6}(2^6 + 2^3 + 2^3 + 2^2) = 14,$$

$$Z_{D_6}(2, 2, 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{12}(2^6 + 2^3 + 2^5 + 2^2 + 3 \cdot 2^4) = 13,$$

com ja havíem recomptat anteriorment.

4.3.6. Exemple. Comptem el nombre de 2-coloracions de K_4 diferents sota el grup cíclic. D'una banda, es pot fer el recompte manual:

Arestes blaves	0	1	2	3	4	5	6
Coloracions	1	2	5	6	5	2	1

D'altra banda, podem aplicar el teorema de Pólya:

σ	multiplicitat	vèrtexs	arestes
Id	1	(.)(.)(.)(.)	(.)(.)(.)(.)(.)(.)
r_{90}	2	(...)	(....)(..)
r_{180}	1	(..)(..)	(..)(..)(.)(.)
r_{270}	2	(...)	(....)(..)

El nombre de coloracions serà:

$$Z_{C_4}^X = \frac{1}{4}(X_1^6 + 2X_4X_2 + X_1^2X_2^2) \implies Z_{C_4}^X(2, \dots, 2) = 22.$$

4.3.7. Observació. El teorema de Pólya es pot usar per comptar el nombre de grafs no isomorfs de n vèrtexs. Si comptem el nombre de 2-coloracions de K_n diferents sota tot $\text{Sym}(n)$, podem interpretar que un dels dos colors es correspon amb posar l'aresta i l'altre color amb no posar l'aresta. Per exemple, en el cas $n = 4$:

multiplicitat	vèrtexs	arestes
1	(.)(.)(.)(.)	(.)(.)(.)(.)(.)(.)
6	(...)	(....)(..)
3	(..)(..)	(..)(..)(.)(.)
8	(.)(...)	(...)(...)
6	(.)(.)(..)	(.)(.)(..)(..)

El nombre de grafs no isomorfs és $\frac{1}{24}(2^6 + 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^4) = 11$.

4.4 Les rotacions del cub

Volem enumerar les simetries rotacionals del cub, és a dir, les rotacions que deixin invariant la “forma” del cub. Tenim tres opcions per escollir l'eix de rotació:

- A través de dues cares oposades. En aquest cas, podem fer o bé una rotació de $\pm 90^\circ$ o de 180° .
- A través de dos vèrtexs oposats. En aquest cas, podem fer una rotació de $\pm 120^\circ$.
- A través de dues arestes oposades. En aquest cas, podem fer una rotació de 180° .

Podem escriure'ns la taula de l'acció d'aquestes rotacions sobre les cares del cub:

σ	multiplicitat	cares
Id	1	(.)(.)(.)(.)(.)(.)
Cara, $r_{\pm 90}$	6	(.)(.)(....)
Cara, r_{180}	3	(.)(.)(..)(..)
Vèrtex, $r_{\pm 120}$	8	(...)(...)
Aresta, r_{180}	6	(.)(.)(..)(..)

4.4.1. Exercici. Completeu la taula amb l'acció sobre els vèrtexs i sobre les arestes del cub.

És possible comprovar que aquestes 24 simetries són totes les possibles. Per exemple, si ens fixem en les cares, podem posar qualsevol de les 6 cares a la part superior, i després tenim 4 possibilitats per la cara frontal. La resta de cares queden determinades a partir d'aquestes dues. Així, hi ha com a molt 24 possibilitats.

Tot seguit, ens preguntem pel nombre de 2-coloracions de les cares del cub invariants per qualsevol d'aquestes rotacions. Es pot fer el recompte manualment:

Cas blaves	0	1	2	3	4	5	6
Coloracions	1	1	2	2	2	1	1

Surten 10 coloracions en total. Si calculem el polinomi d'índexs de cicles:

$$Z_G^X = \frac{1}{24}(X_1^6 + 6X_1^2X_4 + 8X_3^2 + 6X_2^3 + 3X_1^2X_2^2),$$

podem demostrar (amb Pólya) que el nombre de r -coloracions és:

$$\frac{r^2}{24}(r+1)(r^3 - r^2 + 4r + 8).$$

En particular, si $r = 2$, l'expressió anterior dona 10, com era d'esperar.

4.5 Versió general del teorema de Pólya

El teorema de Pólya ens permet calcular el nombre de coloracions diferents sota l'acció d'un grup, però no ens dona cap informació de quantes coloracions hi ha per a cada combinació de colors.

4.5.1. Observació. Recordem que, en el càlcul dels polinomi d'índexs de cicles per les coloracions de les cares d'un cub, surt el següent resultat:

$$Z_G^X = \frac{1}{24}(X_1^6 + 6X_1^2X_4 + 8X_3^2 + 6X_2^3 + 3X_1^2X_2^2).$$

Si substituïm $X_1 = t_1 + t_2$ i $X_2 = t_1^2 + t_2^2$, ens surt:

$$Z_G^X = t_1^6 + t_1^5t_2 + 2t_1^4t_2^2 + 2t_1^3t_2^3 + 2t_1^2t_2^4 + t_1t_2^5 + t_2^6.$$

Observem que el coeficient de $t_1^i t_2^{6-i}$ és exactament el nombre de coloracions del cub amb i cares d'un cert color.

Aquest resultat no és casual, sinó que és conseqüència de la generalització del teorema de Pólya. Abans de demostrar-ho, però, definim un concepte que ens serà necessari:

4.5.2. Definició. Suposem que G actua en X , i que tenim un conjunt $C = \{c_1, \dots, c_r\}$ de colors, on a cada color c_j li assignem una variable $h(c_j) = t_j$. Aleshores, definim la funció $w: C^X \rightarrow \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_r]$, satisfent:

$$w(f) = \prod_{i=1}^r t_i^{m_i(f)},$$

sent $m_i(f)$ el nombre d'elements de X colorejats amb el color i .

4.5.3. Exemple. Considerem el graf cíclic de 6 vèrtexs, i la permutació $\tau = (124)(356)$. Hi ha quatre 2-coloracions fixades per τ , que són:

f	1	2	3	4	5	6	$w(f)$
f_1	b	b	b	b	b	b	t_1^6
f_2	b	b	r	b	r	r	$t_1^3 t_2^3$
f_3	r	r	b	r	b	b	$t_1^3 t_2^3$
f_4	r	r	r	r	r	r	t_2^6

En particular, es té $\sum_{f \in \text{fix}(\tau)} w(f) = t_1^6 + 2t_1^3 t_2^3 + t_2^6 = (t_1^3 + t_2^3)^2$. Apareixen dos nombres: l'exponent de t_1 i t_2 és 3, que és la longitud dels cicles, i l'exponent de la suma és 2, que és el nombre de cicles. Això tampoc és casual.

4.5.4. Teorema. *Teorema de Pólya generalitzat.*

Suposem que G actua en X , i sigui C un conjunt de r colors. Sigui R un conjunt de representants de les òrbites de l'acció de G en C^X . Aleshores:

$$Z_G^X(t_1 + \cdots + t_r, t_1^2 + \cdots + t_r^2, \dots, t_1^n + \cdots + t_r^n) = \sum_{f \in R} w(f).$$

Demostració. Observem que $\prod_{x \in X} h(f(x)) = w(f)$. Si f i g són de la mateixa òrbita (és a dir, $g = \sigma f$), es té:

$$w(g) = \prod_{x \in X} h(g(x)) = \prod_{x \in X} h(\sigma f(x)) = \prod_{x \in X} h(f(\sigma^{-1}(x))) = \prod_{x \in X} h(f(x)) = w(f).$$

Per tant, en considerar $w(f)$, és indiferent quin representant agafem de l'òrbita de f . Suposem ara que $\sigma \in G$ fixa f . Això vol dir que, considerant la descomposició en cicles disjunts de σ , cada element del cicle rep el mateix color. Tenint en compte que cada cicle pot tenir qualsevol dels r colors, es té:

$$\sum_{f \in \text{fix}(\sigma)} w(f) = \sum_{f \in \text{fix}(\sigma)} (t_1 + \cdots + t_r)^{c_1(\sigma)} (t_1^2 + \cdots + t_r^2)^{c_2(\sigma)} \cdots (t_1^n + \cdots + t_r^n)^{c_n(\sigma)},$$

si σ té $c_i(\sigma)$ cicles de longitud i . Recordant que

$$|G| Z_G^X(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in G} X_1^{c_1(\sigma)} \cdots X_n^{c_n(\sigma)},$$

obtenim que:

$$\sum_{\sigma \in G} \sum_{f \in \text{fix}(\sigma)} w(f) = |G| Z_G^X(t_1 + \cdots + t_r, \dots, t_1^n + \cdots + t_r^n).$$

Girant ara el primer sumatori:

$$\sum_{\sigma \in G} \sum_{f \in \text{fix}(\sigma)} w(f) = \sum_{f \in C^X} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma(f)=f}} w(f) = \sum_{f \in C^X} w(f) \frac{|G|}{|\text{orb}(f)|} = \sum_{f \in R} w(f) |G|.$$

Ajuntant les dues igualtats, se segueix el resultat. \square

Una conseqüència directa del teorema és que el coeficient de $t_1^{k_1} \cdots t_r^{k_r}$ ens dona el nombre de r -coloracions amb k_j elements de color j .

4.5.5. Exemple. El polinomi d'índexs de cicles de l'acció del grup rotacional sobre les cares del cub és:

$$Z_G^X = \frac{1}{24}(X_1^6 + 6X_1^2X_4 + 8X_3^2 + 6X_2^3 + 3X_1^2X_2^2).$$

Si substituïm $X_i = t_1^i + \dots + t_6^i$, i ens mirem el coeficient de $t_1t_2 \cdots t_6$, veiem que és:

$$\frac{1}{24} \binom{6}{1: 1: 1: 1: 1: 1} = \frac{6!}{4!} = 30.$$

Per tant, el nombre de 6-coloracions de les cares del cub tals que cada cara rep un color diferent és 30.

Tema 5

Connectivitat de grafs

5.1 Connectivitat per vèrtexs

5.1.1. Definició. Diem que un graf és connex si tot parell de vèrtexs està connectat per un camí. Per convenció, un vèrtex està connectat a si mateix (per un camí de longitud nul·la).

5.1.2. Definició. Anomenem component connex d'un graf a un subgraf connex maximal.

5.1.3. Observació. Tot graf és unió disjunta dels seus components connexos.

5.1.4. Definició. Sigui $G = (V, E)$ un graf i sigui $X \subseteq V$. Anomenem subgraf de G induït per X a

$$G[X] = (X, \{\{a, b\} \in E \mid a, b \in X\}).$$

5.1.5. Proposició. Un graf $G = (V, E)$ és connex si, i només si, existeix una ordenació (v_1, \dots, v_n) dels vèrtexs tal que $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ és connex per a tot $1 \leq i \leq n$. En particular, G és connex si, i només si, conté un arbre d'expansió.

Demostració. La implicació inversa és trivial; vegem la directa. Començant amb un vèrtex qualsevol v_1 , hom pot definir v_{i+1} com el primer vèrtex de $V \setminus \{v_1, \dots, v_i\}$ connectat a $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$, que existeix en virtut de la connexió de G . L'arbre d'expansió es construeix naturalment a partir d'aquesta tria de v_i . \square

5.2 Estructura de grafs k -connexos

5.2.1. Definició. Diem que un graf $G = (V, E)$ és k -connex si $|V| \geq k + 1$ i $G[V \setminus X]$ és connex per a tot $X \subset V$ tal que $|X| < k$. Anomenem connectivitat del graf G al màxim k tal que G és k -connex i la notem per $\kappa(G)$.

5.2.2. Definició. Sigui $G = (V, E)$ un graf i sigui $S \subseteq V$. Diem que S és un separador si $G[V \setminus S]$ és no connex.

5.2.3. Observació. Sigui G un graf no complet. El separador S de G de cardinal mínim té cardinal $|S| = \kappa(G)$.

5.2.4. Definició. Sigui $G = (V, E)$ un graf, sigui S un separador de G i sigui C un component connex de $G[V \setminus S]$. Anomenem separació de G al parell $\{G_1, G_2\}$, on $G_1 = G[C \cup S]$ i $G_2 = G[V \setminus (C \cup S)]$.

5.2.5. Observació. Si $\{G_1, G_2\}$ és un separador d'un graf G , $G = G_1 \cup G_2$ i totes les arestes de G pertanyen, o bé a G_1 , o bé a G_2 .

5.2.6. Definició. Sigui $G = (V, E)$ un graf. Diem que $v \in V$ és un vertex de tall si $\{v\}$ és un separador.

5.2.7. Definició. Anomenem blocs d'un graf G als subgrafs connexos i sense vèrtexs de tall de G que són maximals.

5.2.8. Proposició. Dos blocs intersequen en, com a molt, un vèrtex, que és de tall.

Demostració. Si els blocs B_1 i B_2 tenen més d'un vèrtex en comú, $B_1 \cup B_2$ és un bloc. \square

5.2.9. Corol·lari. Tot cicle està completament contingut en un bloc.

5.2.10. Observació. Els blocs d'un graf són, necessàriament, d'alguna d'aquestes formes

- (i) Un vèrtex aïllat.
- (ii) Dos vèrtexs units per una aresta.
- (iii) Un subgraf 2-connex maximal.

5.2.11. Proposició. Sigui G un graf connex i sigui A el conjunt de vèrtexs de tall de G . Considerem el graf bipartit $B(G)$ els conjunts de vèrtexs del qual són $V_1 = A$ i $V_2 = \{B \subseteq G \mid B \text{ és un bloc de } G\}$ i que té arestes $E = \{\{x, B\} \mid x \in B\}$. $B(G)$ és un arbre.

Demostració. $B(G)$ és connex perquè ho és G i si hi hagués algun cicle contradiria el fet que V_2 és el conjunt de blocs de G . \square

5.2.12. Teorema. Tot graf 2-connex es pot construir partint d'un cicle i afegint, successivament, un camí (que pot contenir nous vèrtexs) entre dos vèrtexs existents.

Demostració. Suposem que G és 2-connex i no satisfà el teorema. Considerem un subgraf maximal H de G que es pugui construir d'aquesta manera. $H \neq G$ perquè hem suposat que G no satisfà el teorema i H és no buit perquè G conté un cicle. Nogensmenys, com que G és 2-connex, existeix un vèrtex de G que no és a H i que es pot connectar a H a través de dos camins que no comparteixen cap altre vèrtex. Això contradia la maximalitat d' H . \square

5.2.13. Definició. Sigui G un graf i sigui e una aresta de G . La contracció de e consisteix a identificar els dos extrems d' e i les arestes múltiples que crea aquesta identificació. El graf resultant es denota per G/e .

5.2.14. Proposició. Sigui $G = (V, E)$ un graf 3-connex de més de 4 vèrtexs. Aleshores, existeix alguna aresta $e \in E$ tal que G/e és 3-connex.

Demostració. Suposem que G/e no és 3-connex per a tota aresta e . Aleshores, existeix algun separador S de G/e de mida menor o igual a 2. Notem per v_{xy} el vèrtex de G/e que resulta d'identificar els veïns x i y a G ($e = xy$). Si v_{xy} no pertany a S , aleshores S és un separador de G , la qual cosa suposa una contradicció. Així doncs, $v_{xy} \in S$. Si $S = \{v_{xy}\}$, aleshores $\{x, y\}$ és un separador de G , la qual cosa també suposa una contradicció. Per tant, $S = \{v_{xy}, u\}$.

D'entre totes les tripletes de vèrtexs $\{x, y, u\}$ en triem una tal que el menor component connex de $G/xy \setminus \{v_{xy}, u\}$ sigui de mida mínima, i anomenem C a aquest component. Com que $\{v_{xy}, u\}$ és un separador minimal, u és veí d'algun vèrtex $v \in C$. Necessàriament, tots els veïns de v diferents de x, y i u pertanyen a C .

Considerem, ara G/uv . Existeix algun vèrtex w tal que $\{v_{uv}, w\}$ és separador de G/uv . Sigui D un dels components connexos de $G/uv \setminus \{v_{uv}, w\}$ que no conté ni x ni y . Sabem que v ha de tenir un veí d a D i que aquest pertany a C . Com que tots els vèrtexs de D són accessibles des de d a través de camins que no passen per x, y, u o v , $D \subsetneq C$, la qual cosa suposa una contradicció. \square

5.2.15. Teorema de Tutte.

Un graf G és 3-connex si, i només si, existeix una seqüència $G_0, G_1, \dots, G_n = G$ tal que

(i) $G_0 = K_4$,

(ii) $G_i = G_{i+1}/xy$ per a alguns $x, y \in G_{i+1}$ tals que $d(x), d(y) \geq 3$.

Demostració. La implicació directa és immediata a partir de la proposició anterior. Per veure la inversa, demostrarem que, si G_i és 3-connex, també ho és G_{i+1} . Suposem, doncs, que $G_i = G_{i+1}/xy$ és 3-connex i que G_{i+1} no ho és. Sigui S un separador de G/xy amb $|S| \leq 2$. Observem que $S \neq \{x, y\}$ perquè, altrament, v_{xy} seria un vèrtex de tall de G_i i que $S \cap \{x, y\} \neq \emptyset$ perquè, altrament, S seria un separador de G_{i+1} . Podem suposar, doncs, que $x \in S$ i que $y \notin S$. Considerem el component connex de G_{i+1} que conté y . Aquest component no pot contenir un segon vèrtex z perquè, si fos així, $S \setminus \{x\} \cup \{v_{xy}\}$ seria un separador de cardinal menor que 3 de G_i . Per tant, $d(y) \leq 2$, la qual cosa suposa una contradicció. \square

5.3 Teorema de Menger

5.3.1. Definició. Sigui $G = (V, E)$ un graf i siguin $A, B \subseteq V$ no buits. Diem que $S \subseteq V$ és un AB -separador si a $G[V \setminus S]$ no hi ha cap camí entre un vèrtex d' A i un de B . Anomenem AB -connector a la unió de camins disjunts que uneixen A i B i que no tenen vèrtexs interiors a $A \cup B$.

5.3.2. Observació. Qualsevol AB -separador S i AB -connector C satisfan que $|S| \geq |C|$, atès que cal eliminar, almenys, un vèrtex de cadascun dels camins per a separar A i B .

5.3.3. Teorema local de Menger.

Sigui $G = (V, E)$ un graf i siguin $A, B \subseteq V$. Aleshores, el mínim AB -separador té el mateix cardinal que el màxim AB -connector.

Demostració. Sigui S un AB -separador mínim i sigui C un AB -connector màxim. Basta veure que $|S| \leq |C|$. Procedirem per inducció sobre el nombre d'arestes de G , $|E|$. Si $|E| = 0$, aleshores $A \cap B$ és un AB -connector màxim i un AB -separador mínim. Si $|E| \geq 0$, aleshores existeix alguna arista $e = \{x, y\} \in E$, i sigui s el cardinal d'un AB -separador mínim de G . El graf $G' = (V, E \setminus \{e\})$ satisfà l'enunciat en virtut de la hipòtesi d'inducció. Si un AB -separador mínim a G' té cardinal s , hem acabat perquè un connector a G' és un connector a G . Suposem que S' és un AB -separador a G' amb $|S'| \leq s$. Com que $S_x = S' \cup \{x\}$ (o, alternativament, $S_y = S' \cup \{y\}$) és un AB -separador

a G , tenim que $|S'| = |S_x| - 1 \geq s - 1$, de manera que $|S'| = s - 1$ i $|S_x| = |S_y| = s$. Sigui S_1 un AS_x -separador a G' i sigui S_2 un BS_y -separador a G' . Observem que S_1 és un AB -separador a G , atès que tot camí entre A i B passa per S_x i, per tant, passa també per S_1 . Anàlogament, S_2 és un AB -separador a G , i tenim que $|S_1|, |S_2| \geq s$. En virtut de la hipòtesi d'inducció, existeixen un AS_x -connector C_1 a G' i un BS_y -connector C_2 a G' de cardinal s . Els s camins de C_1 comencen a A i acaben a S_x , i els s camins de C_2 comencen a B i acaben a S_y . Com que x i y estan units per e a G , podem concatenar cada camí de C_1 amb un camí de C_2 , obtenint un AB -connector de cardinal s . \square

5.3.4. Teorema global de Menger.

Sigui $G = (V, E)$ un graf amb $|V| \geq k + 1$. Aleshores, G és k -connex si, i només si, tot parell de vèrtexs està unit per k camins internament disjunts.

Demostració. La implicació inversa és immediata, vegem la directa. Siguin $x, y \in V$ i siguin A i B els conjunts de veïns de x i de y , respectivament. Com que G és k -connex, els AB -separadors tenen, almenys, k vèrtexs. Per tant, existeix un AB -connector de k camins disjunts, que determina un conjunt de k camins internament disjunts entre x i y . \square

5.3.5. Corollari. Per tot graf G es té que $\kappa(G) \leq \delta(G)$, on $\delta(G)$ és el mínim dels graus dels vèrtexs de G .

5.3.6. Teorema de Mader.

Sigui $G = (V, E)$ un graf tal que la mitjana dels graus dels seus vèrtexs és, almenys, $4k$. Aleshores, G conté un subgraf k -connex.

Demostració. Si $k \in \{0, 1\}$, l'afirmació és trivialment certa. Pel cas general, demostrarem una versió més forta del teorema: si $k \geq 2$ i $G = (V, E)$ és un graf que satisfà que

- (i) $n \geq 2k - 1$,
- (ii) $m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$,

on $n = |V|$ i $m = |E|$, aleshores G conté un subgraf k -connex. En efecte, es tracta d'una versió més forta del teorema perquè, si la mitjana dels graus és, almenys, $4k$,

- (i) $2 \frac{n(n-1)}{2} \geq 4kn \implies n \geq 4k + 1 \implies n \geq 2k - 1$,
- (ii) $m \geq \frac{4kn}{2} = 2kn - 1 \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1$.

Procedirem per inducció doble n . Si $n = 2k - 1$,

$$m \geq (2k - 3)(n - k + 1) + 1 = (n - 2) \left(n - \frac{n + 1}{2} + 1 \right) + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}$$

i $G = K_n \supseteq K_{k+1}$. Suposem, doncs, que $n \geq 2k$. Si existeix algun vèrtex $v \in V$ de grau $d(v) \leq 2k - 3$, el graf $G' = G[V \setminus \{v\}]$ satisfà que $m' \geq m - (2k - 3) \geq (2k - 3)((n - 1) - k + 2) + 1$, de manera que G' conté algun subgraf k -connex en virtut de la hipòtesi d'inducció. Suposem, doncs, que tots els vèrtexs tenen grau major o igual a $2k - 2$ i que G no és k -connex. Existeix un separador S de G de menys de k vèrtexs. Podem considerar una separació $\{G_1, G_2\}$ de G produïda per S . Com que els vèrtexs de G_1 que no són a S tenen, almenys, $2k - 2$ veïns i tots són a G_1 , $n_1 \geq 2k - 1$. Anàlogament,

$n_2 \geq 2k - 1$. Com que $n \geq 2k$, podem aplicar la hipòtesi d'inducció tant a G_1 com a G_2 . Si cap dels dos conté un subgraf k -connex, aleshores

$$m_1 \leq (2k - 3)(n_1 - k + 1)$$

i, anàlogament,

$$m_2 \leq (2k - 3)(n_2 - k + 1).$$

Però

$$m \leq m_1 + m_2 \leq (2k - 3)(n_1 + n_2 - 2k + 2) \leq (2k - 3)(n - k + 1),$$

la qual cosa suposa una contradicció. Per tant, o bé G_1 o bé G_2 contenen un subgraf k -connex. \square

5.3.7. Definició. Sigui X un conjunt i siguin $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \subseteq X$. Anomenem sistema comú de representants distints (SCRD) a un conjunt $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X$ tal que $x_i \in A_i \cap B_{\sigma(i)}$, per a certa $\sigma \in S_m$.

5.3.8. Teorema de Ford-Fulkerson.

Sigui X un conjunt i siguin $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m \subseteq X$. Existeix un sistema comú de representants distints si, i només si,

$$|A(I) \cap B(J)| \geq |I| + |J| - m,$$

per a qualssevol $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$.

Demostració. Comencem per la implicació directa. Sabem que existeix un conjunt $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X$ tal que $x_i \in A_i \cap B_{\sigma(i)}$, per a certa $\sigma \in S_m$. Considerem conjunts $I, J \subseteq \{1, \dots, m\}$ qualssevol i prenem un $i \in I \cap \sigma^{-1}(J)$. Tenim que $x_i \in A_i \cap B_{\sigma(i)} \subseteq A(I) \cap B(J)$. Finalment,

$$|A(I) \cap B(J)| \geq |I \cap \sigma^{-1}(J)| = |I| + |\sigma^{-1}(J)| - |I \cup \sigma^{-1}(J)| \geq |I| + |J| - m.$$

Vegem, ara, la implicació inversa. Considerem el graf $G = (V, E)$ que té vèrtexs

$$V = X \cup \{A_1, \dots, A_m\} \cup \{B_1, \dots, B_m\}$$

i que té arestes

$$E = \{\{x, A_i\} \mid x \in A_i\} \cup \{\{x, B_i\} \mid x \in B_i\}.$$

Que existeixi un sistema comú de representants distints és equivalent al fet que existeixin m camins disjunts d' A a B al graf G . Per tant, en virtut del teorema local de Menger (5.3.3) cal veure que tots els AB -separadors tenen cardinal almenys m . Sigui S un AB -separador de G i considerem els conjunts

$$I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid A_i \notin S\}$$

i

$$J = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid B_j \notin S\}.$$

Com que S separa A de B , qualsevol $x \in A(I) \cap B(J)$ pertany, necessàriament, a S . Per tant, fent ús de la hipòtesi,

$$\begin{aligned} |S| &\geq |A(I) \cap B(J)| + \overbrace{|\{A_i \mid A_i \in S\}|}^{m-|I|} + \overbrace{|\{B_j \mid B_j \in S\}|}^{m-|J|} = \\ &= |A(I) \cap B(J)| + 2m - |I| - |J| \geq m. \end{aligned}$$

\square

5.4 Connectivitat per arestes

5.4.1. Definició. Diem que un graf $G = (V, E)$ és k -aresta-connex si, per tot $S \subseteq E$ amb $|S| < k$, $G' = (V, E \setminus S)$ és connex. Anomenem connectivitat per arestes del graf G al màxim k tal que G és k -aresta-connex i la notem per $\lambda(G)$.

5.4.2. Lema. Sigui G un graf. Es té que

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

5.4.3. Teorema. Un graf $G = (V, E)$ és k -aresta-connex si, i només si, tota parell de vèrtexs està connectat per k camins que no comparteixen arestes.

Demostració. La implicació inversa és immediata, vegem la directa. Considerem el graf $L(G)$ que té per vèrtex les arestes de G i on existeix una aresta entre dos vèrtexs si llurs corresponents arestes a G comparteixen un vèrtex. Un tall d'arestes a G és un tall de vèrtexs a $L(G)$, de manera que $L(G)$ és k -connex. En virtut del teorema global de Menger (5.3.4), tot parell de vèrtexs a $L(G)$ està connectat per k camins disjunts, que es tradueixen a camins que no comparteixen arestes a G . \square

Tema 6

Aparellaments

6.1 Teorema de König

6.1.1. Definició. Un aparellament M en un graf Γ és un conjunt d'arestes sense vèrtexs en comú. En particular, direm que:

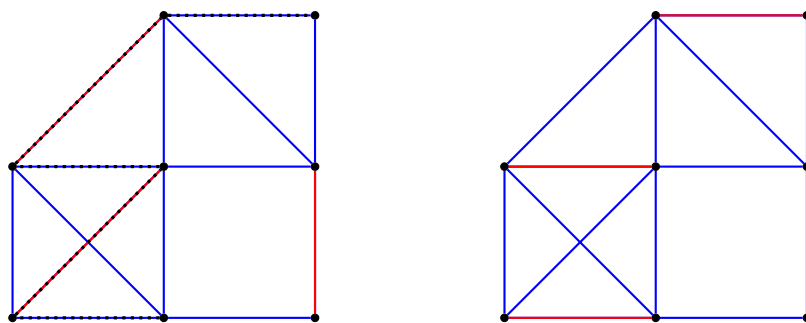
- L'aparellament és maximal si no està contingut en cap altre aparellament.
- L'aparellament és perfecte si tots els vèrtexs són incidents a una aresta de l'aparellament.

6.1.2. Definició. Un camí alternat respecte de M és un camí que comença en un vèrtex no aparellat i que alterna arestes aparellades i no aparellades.

6.1.3. Definició. Un camí augmentador és un camí alternat que acaba en un vèrtex no aparellat.

6.1.4. Exemple. Considerem els dos aparellaments del mateix graf mostrat a la figura inferior. Les arestes de l'aparellament estan marcades en vermell.

Els dos aparellaments són maximals, ja que no s'hi pot afegir cap aresta. No obstant, el graf de l'esquerra té un camí augmentador, marcat en punts negres. Si canviem el color de les arestes del camí augmentador obtenim l'aparellament de la dreta, que és un aparellament amb més arestes (i, de fet, perfecte). Així, queda justificat l'ús del terme "camí augmentador".



6.1.5. Lema. Si existeix un camí augmentador respecte M , aleshores la mida de M no és màxima.

Demostració. Canviant les arestes del camí, obtenim un aparellament més gran. □

Definim ara l'últim concepte que ens falta per arribar al teorema de König, que és el d'una cobertura de vèrtexs.

6.1.6. Definició. Una cobertura de vèrtexs (*vertex cover*) U d'un graf Γ és un subconjunt dels vèrtexs de Γ tal que tota aresta és incident a un vèrtex de U .

6.1.7. Teorema. *Teorema de König.*

Sigui Γ un graf bipartit. Llavors, la mida mínima d'una cobertura de vèrtexs és igual a la mida màxima d'un aparellament.

Demostració. Si el graf és bipartit, podem escriure $V(G) = A \sqcup B$, de manera que totes les arestes connecten un vèrtex de A i un vèrtex de B . Al llarg de la demostració, denotarem amb a els vèrtexs de A i amb b els de B .

En primer lloc, constatem que tota cobertura de vèrtexs més gran o igual que qualsevol aparellament, ja que cada vèrtex de la cobertura cobreix, com a molt, una aresta de l'aparellament.

Sigui M un aparellament de mida màxima. És suficient construir una cobertura de vèrtexs U tal que $|U| = |M|$. Per a cada aresta $ab \in M$, posarem $b \in U$ si existeix un camí alternat de mida senar que acabi a b i que no es pugui estendre a un altre camí alternat de mida superior. Altrament, posarem $a \in U$.

És clar que $|U| = |M|$. Per tant, l'únic que cal demostrar és que U és una cobertura de vèrtexs. Suposem que no ho és, i per tant que existeix una aresta ab tal que $a, b \notin U$. Com que M és maximal, almenys un dels dos a, b ha de ser incident a M , ja que sinó podríem afegir ab a l'aparellament. No obstant, $ab \notin M$, ja que tota aresta de M té un extrem dins la cobertura.

- Suposem que a no està cobert per una aresta de M . Aleshores, ab és un camí alternat de mida 1, senar. Com que $b \notin U$, hem de poder estendre el camí a un nou camí alternat de mida senar.

Aquest camí ha d'anar de A a B a través d'arestes que no són de M , i tornar de B a A amb arestes de M . El camí ha d'acabar a un vèrtex $b' \in B$. Aquest vèrtex b' no pot ser incident a M , ja que sinó es podria estendre el camí (per què?). Però, aleshores, el camí alternat que hem obtingut és augmentador, contradient la maximalitat de M .

- Suposem ara que a està cobert per una aresta de M , diguem-li ab' (necessàriament, $b \neq b'$). Com que $ab' \in M$ i $a \notin U$, s'ha de tenir $b' \in U$. Així, existeix un camí alternat P de longitud senar que acaba en b' . Però $P(b'a)(ab)$ és una extensió de P a un camí alternat senar més llarg (per què això està ben definit?).

En qualsevol dels casos, arribem a contradicció, demostrant que U és una cobertura de vèrtexs. \square

6.1.8. Exercici. Completeu els detalls que s'han deixat a la demostració.

6.2 Teorema de Hall

Al primer tema ja vam demostrar el teorema de Hall (1.1.3). Aquí, el tornarem a demostrar en termes d'aparellaments. L'avantatge de la demostració que donarem tot seguit és

que és algorísmica: no només demostra l'existència d'un SRD, sinó que dona un algorisme per trobar-lo.

Recordem que, en el context del teorema de Hall, teníem A_1, \dots, A_n subconjunts d'un conjunt X , i que un sistema de representants distints (SRD) és una n -tupla (x_1, \dots, x_n) tal que $x_i \in A_i$ i que tots els x_i són diferents.

Si $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, definim $A(J) = \cup_{j \in J} A_j$. La condició de Hall era que

$$|A(J)| \geq |J|$$

per a tot J , i era equivalent a que existís un SRD per als conjunts A_1, \dots, A_n .

A partir dels conjunts A_1, \dots, A_n i X podem construir un graf bipartit Γ . Dividim els vèrtexs en dos conjunts: el primer conjunt té com a vèrtexs A_1, \dots, A_n i el segon conjunt té com a vèrtexs els elements $x \in X$. Posem una aresta entre x i A_i si i només si $x \in A_i$. En aquest cas, un aparellament que cobreixi tots els vèrtexs de A es correspondrà amb un SRD. En efecte:

6.2.1. Teorema. Teorema del matrimoni de Hall.

El graf Γ té un aparellament que cobreix tots els vèrtexs de A si i només si se satisfà la condició de Hall.

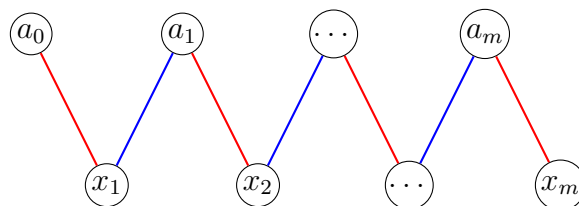
Demostració. És clar que si Γ té tal aparellament, aleshores se satisfà la condició de Hall.

Per a la implicació contrària, suposem que se satisfà la condició de Hall, i sigui M un aparellament. Demostrarem que si algun vèrtex $a \in A$ no està aparellat, el podem aparellar canviant arestes de M però sense desaparellar cap vèrtex de A prèviament aparellat.

Suposem que $a_0 \in A$ no està cobert per M . Per la condició de Hall, existeix un veí $x_1 \in X$ de a_0 . Si x_1 no està cobert per M , parem. Altrament, x_1 està aparellat amb $a_1 \in A$. Aplicant la condició de Hall a $\{a_0, a_1\}$, existeix un $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ que és veí de a_0 o a_1 . Pot passar que:

- x_2 no estigui cobert per M i sigui veí de a_0 . En aquest cas, ja estem.
- x_2 no estigui cobert per M i no sigui veí de a_0 (per tant, ho és de a_1). Si treiem $x_1 a_1$ de l'aparellament i posem $a_0 x_1$ i $a_1 x_2$, ja estem.
- x_2 estigui cobert per M . En aquest cas, aplicant el mateix raonament obtindríem uns nous $a_3 \in A$, $x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$.

En general, apliquem el raonament repetidament fins que arribem a un vèrtex x_m no cobert per M (hi arribarem en un nombre finit de passos). En aquest cas, podem canviar totes les arestes $x_i a_i$, amb $1 \leq i \leq m-1$ per $a_{i-1} x_i$ amb $1 \leq i \leq m$, augmentant la mida de M de la forma desitjada (canviem les arestes blaves per les vermelles en la figura).



□

6.3 Aparellaments estables

Considerem ara que els vèrtexs tenen un ordre de preferència (estricte) sobre els seus veïns a l'hora de ser aparellats, assumint que tots els vèrtexs prefereixen estar aparellats a no estar-ho.

6.3.1. Definició. L'aresta $xy \notin M$ és inestable respecte M si x prefereix a y sobre el vèrtex al qual està aparellat (si està aparellat), i y prefereix a x sobre el seu vèrtex aparellat.

6.3.2. Definició. Un aparellament es diu estable si no té cap aresta inestable.

Observem que tot aparellament estable és maximal, ja que si hi haguessin dos vèrtexs no aparellats connectats per una aresta, preferirien ajuntar-se que estar sols. En general, un aparellament estable no necessàriament existeix, però en el cas dels grafes bipartits sí:

6.3.3. Teorema. Tot graf bipartit admet un aparellament estable.

Demostració. Altra vegada, farem una demostració algorísmica. Suposem que el graf està bipartit en dos conjunts A, B . L'algorisme consistirà en diversos torns, en els quals tot vèrtex de A es proposarà al seu vèrtex preferit de B que no l'hagi rebutjat prèviament.¹ Si $b \in B$ rep més d'una proposició, escollirà la preferida i rebutjarà les altres. Els vèrtexs rebutjats eliminaran b de la seva llista de preferències i seguirem al següent torn.

L'algorisme segueix fins que tot vèrtex de B rep, com a molt, una proposició. Aparellant els vèrtexs segons aquestes últimes proposicions, demostrarem que l'aparellament obtingut és estable.

Suposem, buscant una contradicció, que $xy \notin M$ és una aresta inestable, amb $x \in A$ i $y \in B$. Observem que si un vèrtex de B no està aparellat, és que no ha obtingut mai cap proposició (ja que, altrament, sempre hi ha una proposició que no rebutja). De forma similar, si un vèrtex de A no està aparellat, és que totes les seves proposicions han estat rebutjades. Els casos són:

- x i y no estan aparellats amb ningú. En aquest cas, la proposició de x a y ha d'haver estat rebutjada, però això vol dir que y hauria d'estar aparellat!
- x no està aparellat però y sí. Això vol dir que y ha rebutjat a x en algun moment, quedant-se a algú que preferia per sobre de x . Per tant, xy no és inestable!
- x està aparellat i y no. Si x està aparellat a y' però prefereix a y , això vol dir que y l'ha rebutjat. Però això implica que y ha d'estar aparellat!
- x i y estan aparellats (però no entre sí). En aquest cas, si x està aparellat amb y' però prefereix a y , això vol dir que y l'ha rebutjat. Per tant, y està aparellat amb algú a qui prefereix!

En qualsevol cas, arribem a contradicció. □

¹Històricament, als llibres de text s'associava A amb els homes i B amb les dones (tots heterosexuats, és clar), i a cada torn els homes es proposaven a les dones. L'analogia serveix per entendre l'algorisme, però comença a ser una mica casposa (segons el parer de l'autor).

6.4 Teorema de Tutte

6.4.1. Definició. Una component senar d'un graf Γ és una component connexa amb un nombre senar de vèrtexs. Es denota el nombre de components senar per $oc(\Gamma)$.

6.4.2. Teorema. *Teorema de Tutte.*

El graf Γ té un aparellament perfecte si, i només si, per a tot subconjunt $S \subseteq V(\Gamma)$, se satisfà $oc(\Gamma \setminus S) \leq |S|$.

Demostració. Quant a la implicació directa, suposem que Γ té un aparellament perfecte, i sigui S un subconjunt qualsevol de vèrtexs. A $\Gamma \setminus S$, s'hauran preservat exactament tots aquells aparellaments que no involucrin vèrtexs de S . Cada component senar de $\Gamma \setminus S$ té, almenys, un vèrtex que no està aparellat, fet que vol dir que estava aparellat amb un vèrtex de S a Γ . En altres paraules, per a cada component senar de $\Gamma \setminus S$ hi ha d'haver un vèrtex de S , com volíem veure.

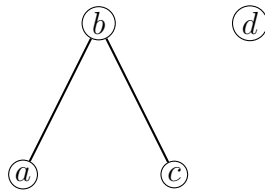
Centrem-nos ara en la implicació recíproca. La primera observació que fem és que si afegim arestes a Γ , la condició $oc(\Gamma \setminus S) \leq |S|$ no queda afectada:

- Si una aresta uneix dos vèrtexs d'una component connexa, no passa res.
- Si una aresta uneix dues components senars, queda una component parella, disminuint $oc(\Gamma \setminus S)$.
- Si una aresta uneix una component senar i una de parella, queda una component senar i $oc(\Gamma \setminus S)$ es queda igual.
- Si una aresta uneix dues components parelles, queda una component parella i altrament $oc(\Gamma \setminus S)$ es queda igual.

Suposem, buscant una contradicció, que Γ no té un aparellament perfecte. Sigui Γ^* un graf obtingut afegint arestes a Γ , de manera que afegir una aresta més doni un graf que admet un aparellament perfecte. Per l'observació anterior, se segueix satisfent $oc(\Gamma^* \setminus S) \leq |S|$.

Sigui K el subconjunt de vèrtexs de Γ^* que estan units a tots els altres vèrtexs. Separarem la demostració en dos casos, segons si $\Gamma^* \setminus K$ té totes les components connexes completes o no.

Suposem primer que $\Gamma^* \setminus K$ té una component connexa no completa. Així doncs, existeix un subgraf $K_{1,2}$ induït:



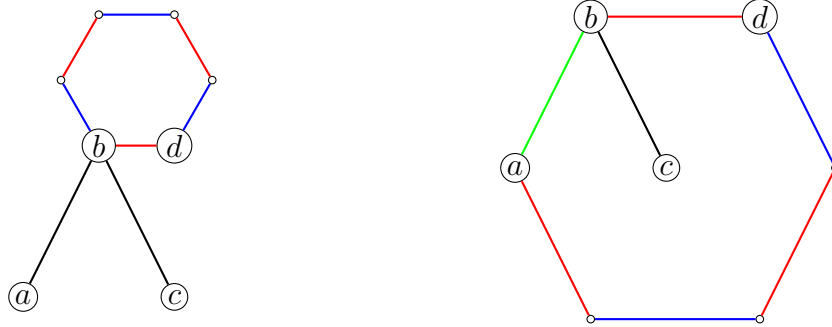
Com que $b \notin K$, existeix algun vèrtex de Γ^* al qual no està connectat, diguem-li d . Atès que afegir una aresta a Γ^* dona un graf amb un aparellament perfecte, considerem els aparellaments M_{ac} i M_{bd} corresponents a afegir les arestes ac i bd , respectivament.

Observem que $ac \in M_{ac}$ i $bd \in M_{bd}$, ja que sinó, els aparellaments perfectes també ho serien de Γ^* . Observem també que cada vèrtex està cobert exactament per una aresta de M_{ac} i una de M_{bd} (potser iguals).

Sigui P el camí que comença al vèrtex d i que segueix únicament per arestes dels aparellaments, començant per M_{ac} i després per M_{bd} . Sota aquestes condicions, el camí

passa per una aresta de M_{ac} , després per una de M_{bd} , després per una de M_{ac} , i així successivament. Aquest camí ha de ser un cicle que no contingui cicles més petits (penseu-ho), i d'aquesta manera P ha de tornar a d a través de M_{bd} (es pot arribar a cada vèrtex com a molt amb dues arestes diferents, les de M_{ac} o M_{bd} que siguin incident al vèrtex).

Suposem en primer lloc que el camí arriba a b abans d'arribar a a o c . Considerem la figura de l'esquerra, on les arestes de M_{bd} són les vermelles i les de M_{ac} , les blaves. Si en el cicle substituïm les arestes de M_{bd} per les de M_{ac} incidents a P (és a dir, canviem el color), M_{bd} passa a ser un aparellament perfecte que no utilitza bd . Però això vol dir que Γ^* té un aparellament perfecte, arribant a contradicció.



Suposem ara que arribem a a abans que a b o a c . En aquest cas, substituïm les arestes de M_{bd} incidents a P amb les de M_{ac} fins que arribem a a , i afegim l'aresta ab . D'aquesta manera, hem obtingut un aparellament perfecte per Γ^* , arribant altra vegada a contradicció.

Per tant, ens hem de trobar en el cas que totes les components de $\Gamma^* \setminus K$ siguin completes. En cada component completa parella de $\Gamma^* \setminus K$ podem aparellar tots els vèrtexs, mentre que en les components senars els podem aparellar tots menys un. Aquest vèrtex sobrant ha d'estar aparellat amb algun vèrtex de K si volem assolir algun aparellament perfecte. Això sempre es pot fer, ja que $oc(\Gamma^* \setminus K) \leq |K|$ i tot vèrtex de K està connectat amb tothom.

Ara només cal comprovar que a K ens queda un nombre parell de vèrtexs per aparellar (com que tots els vèrtexs de K estan connectats, sempre podem aparellar qualsevol subconjunt parell). Si apliquem la hipòtesi per $S = \emptyset$, veiem que $oc(\Gamma^*) \leq 0$, i per tant totes les components de Γ^* són parelles. Per tant, el nombre total de vèrtexs és parell i podem fer un aparellament perfecte, arribant a contradicció. \square

Tema 7

Planaritat

7.1 Preliminars topològics

Començarem aquest capítol amb algunes propietats topològiques dels grafs planars. No les demostrarem totes, ja que algunes de les demostracions serien més pròpies d'un curs de topologia que no pas de teoria de grafs. El lector està convidat a explorar-les pel seu compte, bé sigui amb els apunts oficials de l'assignatura o pel seu compte.

7.1.1. Definició. Un graf $G = (V, E)$ és planar si existeix una aplicació $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ i, per a cada aresta $e = xy$, existeix també una corba simple (i.e. que no té autointerseccions) $\phi_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, de manera que $\phi_e(0) = \phi(x)$, $\phi_e(1) = \phi(y)$ i $\text{Im } \phi_e \cap \text{Im } \phi_{\tilde{e}} \subseteq e \cap \tilde{e}$.

En aquest context, una cara d'un graf planar és una component arc-connexa de $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

En altres paraules, un graf és planar si es pot dibuixar al pla sense que les arestes es creuin. Addicionalment, es pot suposar que les arestes són rectes:

7.1.2. Lema. Si G és planar, existeix una immersió de G en el pla on totes les arestes són línies rectes.

No ho demostrarem. Tot seguit, enunciem un parell de resultats que poden ser interessants però que tampoc demostrarem, i després demostrarem la fórmula d'Euler.

7.1.3. Teorema. *Teorema de la corba de Jordan.*

Una corba simple i tancada divideix \mathbb{R}^2 en dues components connexes, una d'elles fitada i l'altre no fitada.

7.1.4. Proposició. Si G és planar i 2-connex, aleshores tota cara de G (en alguna immersió de G en el pla) està delimitada per un cicle de G .

7.1.5. Teorema. *Fórmula d'Euler.*

Sigui G un graf planar connex, amb n vèrtexs, m arestes i f cares. Aleshores:

$$n - m + f = 2.$$

Demostració. Ho farem per inducció en m . El cas base és $m = n - 1$, quan G és un arbre. En aquest cas, hi ha una sola cara, l'exterior. Així doncs, se satisfà la fórmula:

$$n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2.$$

Suposem que $m > n - 1$. En aquest cas, seleccionem una aresta e d'algun cicle de G . Aquesta aresta separa dues cares, així que quan la treiem, $G \setminus e$ té una aresta menys i una cara menys (les dues cares ja no queden separades). Se segueix el resultat per inducció. \square

7.1.6. Corollari. Si $n > 2$, tot graf planar satisfà $m \leq 3n - 6$. Si, addicionalment, el graf és bipartit, se satisfà $m \leq 2n - 4$.

Demostració. Tota aresta és incident a dues cares, i tota cara és incident, com a mínim, a tres arestes. Per tant, $2m \geq 3f$. Així,

$$6 = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m \implies m \leq 3n - 6.$$

Si el graf és bipartit, la condició és que $2m \geq 4f$, i el raonament és anàleg. \square

En particular, K_5 té $10 > 3 \cdot 5 - 6$ arestes, i per tant no pot ser planar. De forma similar, $K_{3,3}$ tampoc ho és: té $9 > 2 \cdot 6 - 4$ arestes.

7.2 Teorema de Kuratowski

7.2.1. Definició. Donat un graf G , una subdivisió d'una aresta $e = xy$ del graf és la substitució de l'aresta per un camí entre x i y on tots els vèrtexs tenen grau 2, i una subdivisió de G és un graf obtingut subdivint algunes de les seves arestes.

En aquest context, direm que G és un menor topològic de H si H conté un subgraf que és una subdivisió de G , i escriurem $G \preceq_T H$.

Podem pensar que una subdivisió és, senzillament, posar vèrtexs al mig de les arestes. És clar, per exemple, que si un graf no és planar, qualsevol subdivisió seva tampoc ho és i, per tant, qualsevol graf planar no pot contenir cap subdivisió de K_5 o de $K_{3,3}$. De fet, això és suficient:

7.2.2. Teorema. *Teorema de Kuratowski.*

Un graf és planar si, i només si, no conté cap subdivisió de K_5 o de $K_{3,3}$ (o, alternativament, $K_5, K_{3,3} \not\preceq_T G$).

La demostració es farà a través de dos lemes:

7.2.3. Lema. Si G és 3-connex i $K_5, K_{3,3} \not\preceq_T G$, aleshores G és planar. A més, G admet una immersió planar convexa (i.e. totes les cares són polígons convexos, llevat potser de la cara exterior, el complement de la qual és un polígon convex).

Demostració. Ho farem per inducció en $n = |V(G)|$. Per $n = 4$, l'únic cas és $G = K_4$, en el cas l'enunciat és cert.

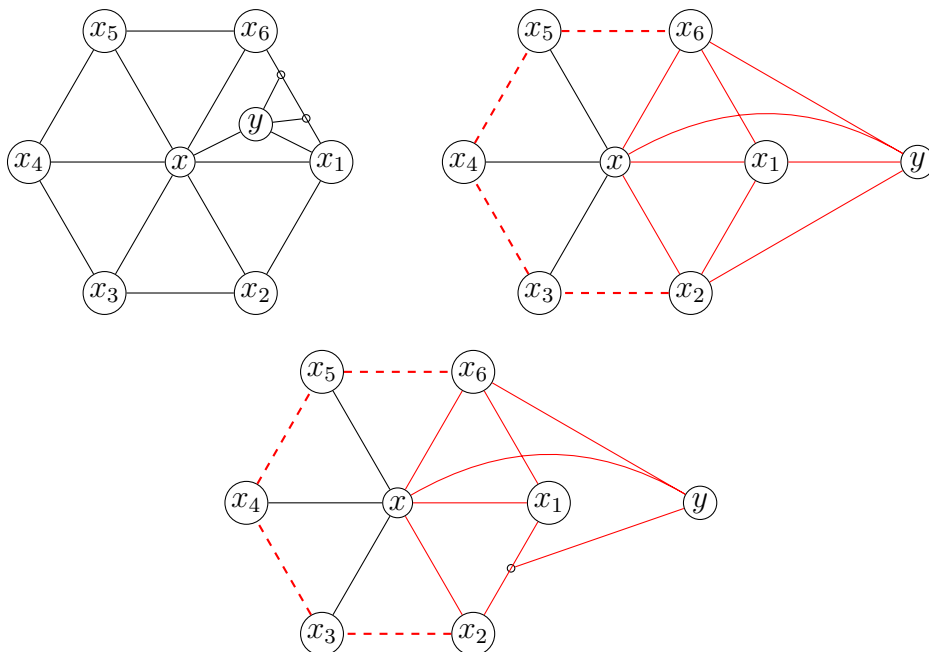
Suposem que $n > 4$. Per un teorema de Tutte (5.2.15), existeix una aresta $e = xy$ tal que $G' = G/e$ és 3-connex. G' no conté $K_5, K_{3,3}$ com a menors topològics. Per tant, per la hipòtesi d'inducció, G' és planar, i admet una immersió planar convexa.

Sigui v_{xy} el vèrtex de G' obtingut contraient x i y . Com que $G \setminus v_{xy}$ és 2-connex, v_{xy} es troba a l'interior d'un cicle C . Siguin x_1, \dots, x_k els vèrtexs del cicle, numerats en sentit horari, i sigui $N_G(y)$ els veïns de y en G . Considerem 3 casos:

1. $N_G(y) \subseteq C \cap [x_i, x_{i+1}]$ per a cert i (mòdul k). En aquest cas, identificant v_{xy} amb x i posant y dins la cara determinada per v_{xy}, x_i, x_{i+1} i ajuntant-lo amb tots els seus veïns s'obté una immersió planar convexa.
2. $|N_G(x) \cap N_G(y)| \geq 3$ (i no estem al primer cas). Siguin z_1, z_2, z_3 veïns comuns de x i y . Aleshores, aquests 5 vèrtexs formen una subdivisió de K_5 , en contradicció amb les hipòtesis.

3. $|N_G(x) \cap N_G(y)| \leq 2$ (i no estem al primer cas). Llavors, com que y ha de tenir algun veí z en un segment $x_i x_{i+1}$ i un altre veí z' en un segment diferent. Aleshores, $x, z, z'; y, x_i, x_{i+1}$ és una subdivisió de $K_{3,3}$.

A la figura següent es mostren els tres casos. En vermell, es mostren les arestes de les subdivisions, i les línies ratllades indiquen que és una aresta subdividida.



□

7.2.4. Lema. Si G té un nombre maximal d'arestes satisfent que $K_5, K_{3,3} \not\preceq_T G$, aleshores G és 3-connex (o $|V(G)| \leq 3$).

Demostració. Ho farem per inducció en $n = |V(G)|$. El cas base per $n = 4$ és $G = K_4$, que és 3-connex.

Suposem que $n > 4$, i sigui S un conjunt separador mínim de G , de manera que el graf quedi separat en dues components G_1, G_2 . Siguin $x \in V(G_1) \setminus V(G_2)$, $y \in V(G_2) \setminus V(G_1)$, que no estiguin connectats. Si afegim l'aresta xy a G , per maximalitat, ens apareixerà un menor topològic $X \in \{K_5, K_{3,3}\}$.

Buscant una contradicció, suposarem que $|S| \leq 2$. Com que X és 3-connex (en els dos casos), es té que tots els vèrtexs de X (els "originals", no necessàriament els obtinguts per subdivisió) han d'estar continguts en una de les dues components, suposem que G_1 . Es deixa al lector comprovar aquest detall.

Llavors, separem per casos:

- Si $|S| = 0$, aleshores la subdivisió de les arestes no pot passar per xy , i llavors es té $X \preceq_T G_1 \subseteq G$, que contraduïu les hipòtesis.
- Si $|S| = 1$, $S = \{u\}$, suposem que una subdivisió d'una de les arestes de X passa per xy . Aquest camí, quan torni de G_2 a G_1 , ha de passar necessàriament per u . Així, substituïnt el camí $x \rightarrow y \rightarrow u$ per un camí en G_1 de $x \rightarrow u$, es tindrà $X \preceq_T G_1 \subseteq G$, contradicció.

- Si $|S| = 2$, $S = \{u, v\}$, tenim dos casos depenent de si $uv \in E(G)$ o no. Si $uv \notin E(G)$, aleshores $G + uv$ conté X com a menor topològic. No obstant, si la subdivisió de X conté uv , podem substituir l'aresta uv per un camí en G agafant un vèrtex $w \in G_2$ i reemplaçant uv per $u \rightarrow w \rightarrow v$. Per tant, $X \preceq_T G$, contradicció.

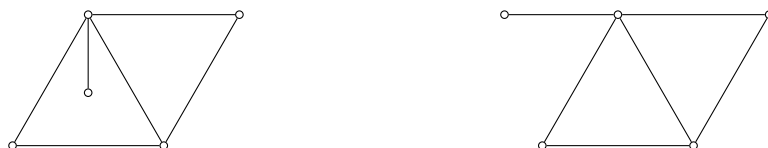
En conseqüència, podem suposar que $uv \in E(G)$. Aleshores, G_1 i G_2 són maximals sense contenir K_5 ni $K_{3,3}$ i, per inducció, són 3-connexos (o petits), i pel lema anterior són planars. Escollim una immersió del pla de manera que uv caigui en la cara exterior de G_1 , i agafem x, y en G_1 i G_2 en les cares externes dels grafs respectius. Suposem que en X , el camí que passa per y torna a G_1 a través de v . Aleshores, substituint xy per $x \rightarrow u \rightarrow y$ obtenim un nou camí que no conté xy . Aleshores, $X \preceq_T G$, contradicció.

□

Així doncs, els dos lemes impliquen el teorema de Kuratowski, ja que podem assumir sense pèrdua de generalitat que el graf té un nombre maximal d'arestes.

7.3 Immersions

Considerem els dos grafs de la figura següent:



En termes únicament de vèrtexs i arestes, són isomorfs, però observem que en el graf de la dreta la cara exterior conté tots 5 vèrtexs, cosa que no passa en cap cara del graf de l'esquerra. Per tant, en termes intuïtius, aquestes dues immersions en el pla haurien de ser “diferents”. Formalitzem aquest concepte:

7.3.1. Definició. Dues immersions de dos grafs planars G_1 i G_2 són equivalents si existeix una bijecció $\phi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ que preservi incidències d'arestes i cares.

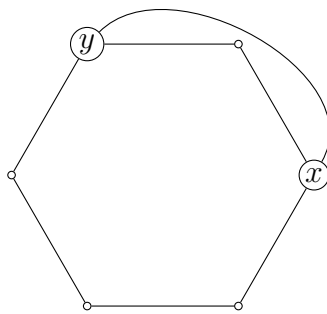
7.3.2. Teorema. *Teorema de Whitney.*

Si G és 3-connex, aleshores G admet com a molt una immersió al pla (llevat d'equivalència).

Ho demostrarem a través del següent lema:

7.3.3. Lema. Sigui G un graf 3-connex. Un cicle C de G és una cara en una immersió de G en el pla si, i només si, C és induït (és a dir, no té cordes) i és no separant ($G \setminus C$ és connex).

Demostració. Suposem que C és la frontera d'una cara. Siguin x, y dos vèrtexs no consecutius de C units per una corda. Aquesta corda ha de passar “per fora” del cicle, fet que impedeix que hi hagi 3 camins diferents unint dos vèrtexs en components diferents de $C \setminus \{x, y\}$, contradient que G sigui 3-connex.



Quant a la propietat de no ser separant, considerem dos vèrtexs qualssevol u, v . Com que G és 3-connex, existeixen tres camins disjunts que els uneixen. Considerant la unió d'aquests tres camins, C pot estar delimitada com a molt per dos d'aquests camins, i per tant C no separa u i v .

El recíproc es deixa com a exercici. □

A partir d'aquest lema, la demostració del teorema de Whitney és immediata: tot isomorfisme de grafs preserva cicles induïts i no-separants, i per tant ha de preservar també les cares.

Tema 8

Coloració

8.1 Coloració de vèrtexs

8.1.1. Definició. Sigui G un graf. Una coloració de vèrtexs és una aplicació $c: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, per a algun cert k enter positiu.

La coloració es diu pròpia si els dos extrems de tota aresta del graf tenen colors diferents.

Si no s'especifica el contrari, sempre que parlem d'una coloració en aquest tema farem referència a una coloració pròpia.

8.1.2. Definició. El nombre cromàtic $\chi(G)$ d'un graf és el mínim nombre de colors necessaris per a obtenir una coloració pròpia.

Així, per exemple, un graf és bipartit si, i només si, $\chi(G) = 2$. Tampoc és difícil veure que el nombre cromàtic d'un arbre és 2, o que si C_n és el cicle de n vèrtexs, $\chi(C_n)$ és 2 si n és parell i 3 si n és senar (o 1 si $n = 1$).

Un teorema important, però que no demostrarem aquí a causa de la seva complexitat, és el teorema dels quatre colors, que afirma que si G és planar, aleshores $\chi(G) \leq 4$; és a dir, tot graf planar es pot pintar amb com a molt 4 colors.

Donem tot seguit algunes fites pel nombre cromàtic $\chi(G)$:

8.1.3. Proposició. Si G té n vèrtexs, aleshores:

$$\chi(G) \geq \max \left\{ \omega(G), \frac{n}{\alpha(G)} \right\},$$

on $\omega(G)$ és el nombre de clique del graf (la mida del subgraf complet més gran de G), i $\alpha(G)$ és el nombre de coclique del graf (la mida del subgraf estable - sense arestes - més gran de G o, alternativament, el nombre de clique del complementari de G).

Demostració. D'una banda, si tenim un subgraf complet de $\omega(G)$ vèrtexs, és clar que necessitem pintar-los tots d'un color diferent per a obtenir una coloració pròpia.

D'altra banda, el subgraf format pels vèrtexs pintats d'un cert color és un graf estable, sense arestes. Aquests grafs poden tenir, com a molt, $\alpha(G)$ vèrtexs, de manera que $n \leq \alpha(G)\chi(G)$, d'on se segueix el resultat. \square

8.1.4. Teorema. *Teorema de Szekeres-Wilf.*

Per a tot graf G , se satisfà

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H),$$

on $\delta(H)$ és el mínim grau del subgraf H .

Demostració. Construïrem una coloració del graf que satisfaci la fita. Ho farem amb un algorisme voraç (*greedy*): ordenarem els vèrtexs v_1, \dots, v_n , acolorirem v_1 amb 1 i, un cop haguem acolorit v_i , acolorirem v_{i+1} amb el mínim color disponible que mantingui que $G[v_1, \dots, v_{i+1}]$ estigui pròpiament acolorit.

Falta ordenar els vèrtexs. Escollirem v_n tal que $d(v_n) = \delta(G)$ (és a dir, amb mínim grau). Un cop escollit v_{n-i} , escollirem v_{n-i-1} tal que en el subgraf $H = G[v_1, \dots, v_{n-i-1}]$, $d_H(v_{n-i-1}) = \delta(H)$. D'aquesta manera, quan fem la coloració amb l'algorisme voraç, a cada moment tindrem prohibits com a molt $\delta(G[v_1, \dots, v_i])$ colors, de manera que podem satisfer la fita superior. \square

Observem que si $G = K_n$, la fita s'assoleix. També s'assoleix la fita si $G = C_{2n+1}$. Justament aquests dos grafs seran les excepcions pel següent teorema:

8.1.5. Teorema. *Teorema de Brooks.*

Suposem que $G \neq K_n, C_{2n+1}$ és un graf connex. Llavors,

$$\chi(G) \leq \Delta(G),$$

on $\Delta(G)$ representa el màxim grau de G .

Demostració. Ho farem en diferents casos:

- i) Suposem que G és 3-connex. Com que $G \neq K_n$, existeix x amb dos veïns z, z' no adjacents entre ells. Utilitzarem l'algorisme voraç anterior posant $v_1 = z$ i $v_2 = z'$, de manera que tots dos quedaran acolorits amb el color 1. Escollim també $v_n = x$, i un cop hem escollit v_{i+1} , escollim v_i tal que tingui una aresta amb algun dels v_{i+1}, \dots, v_n (tal aresta existeix perquè G és 3-connex: si eliminem z, z' , el graf continua sent connex, i per tant ha d'existir alguna aresta entre els conjunts v_3, \dots, v_i i v_{i+1}, \dots, v_n).

Amb aquesta ordenació, sempre que volguem acolorir v_i ($i < n$), tindrem com a molt $\Delta - 1$ colors prohibits. En el cas de $v_n = x$, com que els seus veïns z, z' tenen el mateix color, també té com a molt $\Delta - 1$ colors prohibits. Per tant, existeix una coloració amb Δ colors com a molt.

- ii) Si G és 1-connex però no 2-connex, existeix x tal que $G \setminus \{x\}$ no és connex. Siguin G_1, \dots, G_m les components connexes de $G \setminus \{x\}$. Per inducció, podem fer una coloració de $G_i \cup \{x\}$ (si són cicles senars o grafs complets han de tenir grau menor que Δ). Permutant els colors, podem suposar que x sempre rep el color 1. Per tant, ajuntant les coloracions, G és Δ -colorable.
- iii) Si G és 2-connex però no 3-connex, existeixen x, y tal que $G \setminus \{x, y\}$ no és connex. Com abans, existeixen components connexes G_1, \dots, G_m . La idea serà acolorir $G_i \cup \{x_i, y_i\}$, on x_i, y_i són còpies de x, y , i ajuntar les coloracions. Si $d(x_i), d(y_i) < \Delta - 1$ per a tot i , podem aconseguir coloracions de manera que x_i i y_i rebin colors diferents (suposem que són 1 i 2). Ajuntant totes les components, ja ho tindriem.

L'únic cas en el qual no es dona això és quan $m = 2$ i $d(x_1) = d(y_1) = \Delta - 1$ i x_1, y_1 sempre reben el mateix color. En aquest cas, $d(x_2) = d(y_2) = 1$, i per tant podem permutar els colors en G_2 per aconseguir que x_2 i y_2 tinguin el mateix color. En aquest cas, també podem ajuntar les dues coloracions.

□

8.2 Grafs planars

Tot seguit, particularitzem alguns dels nostres resultats de coloració al cas de grafs planars. Com ja s'ha esmentat anteriorment, tot graf planar és 4-colorable, però la demostració requereix comprovar molts casos i no la farem aquí. No obstant, podem obtenir resultats més febles amb els coneixements que tenim.

Recordem que tot graf planar de n vèrtexs té, com a molt, $3n - 6$ arestes. Així doncs, hi ha d'haver algun vèrtex que tingui grau estrictament inferior a 6, ja que:

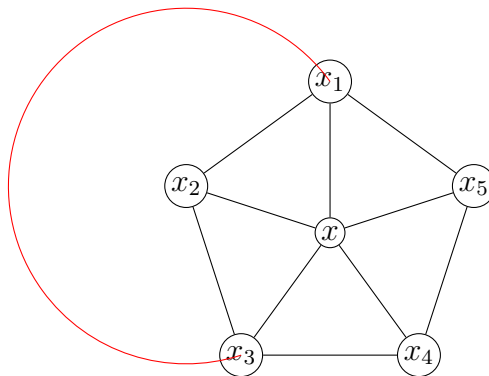
$$\frac{1}{n} \sum_{x \in V} d(x) \leq \frac{2(3n - 6)}{n} < 6.$$

Així, $\delta(G) \leq 5$ per a tot graf planar G , i pels resultats anteriors deduïm que $\chi(G) \leq 6$. Podem millorar aquesta fita:

8.2.1. Teorema. Si G és planar, aleshores $\chi(G) \leq 5$.

Demostració. Suposarem sense pèrdua de generalitat que G és maximalment planar. Farem la demostració per inducció en $n = V(G)$. Els casos base es poden comprovar fàcilment (per exemple, si $n = 4$, $G = K_4$, que és 4-colorable).

Suposem doncs que $n > 4$. Si $\delta(G) \leq 4$, pel teorema de Szekeres-Wilf (8.1.4) ja haurem acabat. Per tant, suposem que existeix $x \in V(G)$ amb grau $d(x) = 5$. Per inducció, podem acolorir $G \setminus \{x\}$ amb 5 colors. Podem suposar que els veïns de x reben els 5 colors diferents, ja que altrament només caldria assignar a x el color que falta per completar la coloració.



Sigui x_i el veí de x que rep el color i , $1 \leq i \leq 5$. Considerem el subgraf format pels vèrtexs de color 1 i 3, $G'[1, 3]$. Considerem dos casos:

- Si x_1 i x_3 estan en components connexes diferents de $G'[1, 3]$, canviem tots els colors en una de les components connexes: per exemple, en la que conté x_1 canviem el color 1 pel 3 i viceversa. En aquest cas, podem assignar el color 1 a x i seguir tenint una coloració pròpia.

- Si x_1 i x_3 estan en la mateixa component connexa de $G'[1, 3]$, aleshores x_2 i x_4 estan en components connexes diferents (com es pot deduir de la figura), i podem aplicar el raonament anterior.

En qualsevol cas, obtenim una coloració pròpia amb 5 colors de G . □

8.2.2. Definició. Donat un graf planar $G = (V, E, F)$, el seu graf dual és $G^* = (F, E^*)$, on E^* és la incidència entre cares.

En altres paraules, els vèrtexs del graf dual són les cares del graf planar, i dos vèrtexs del graf dual comparteixen una aresta si les dues cares corresponents són incidents en el graf original.

8.2.3. Proposició. Sigui G un graf planar 2-connex. Llavors, G és bipartit si, i només si, totes les cares tenen un nombre parell d'arestes (i.e. tots els vèrtexs del graf dual tenen grau parell).

Demostració. Si G és bipartit, tots els cicles de G són parells, però tota cara en un graf 2-connex està delimitada per un cicle.

En el cas recíproc, observem que tot cicle conté dins seu diferents cares. No és difícil veure que si dues cares amb un nombre parell d'arestes són incidents, quan eliminem l'aresta que uneix ambdues cares resulta una sola cara amb un nombre parell d'arestes. Si fem això repetidament amb totes les arestes que són dins del cicle, ens acaba quedant que el cicle té un nombre parell d'arestes. □

8.2.4. Teorema. Sigui G un graf maximal planar. Aleshores, $\chi(G) = 3$ si, i només si, G és Eulerià.

Demostració. Suposem que $\chi(G) = 3$. Si agafem un vèrtex v numerat amb 1, tots els seus veïns han d'estar numerats amb 2 i 3. Aleshores, els veïns de v formen un cicle (com que G és maximal planar, totes les cares són triangles; en particular les incidents a x - feu un dibuix si no ho veieu). El cicle necessàriament ha de tenir longitud parella, de manera que $d(v)$ és parell. Per tant, G és Eulerià.

La implicació recíproca es deixa com a exercici. □

Finalment, enunciem un resultat que no demostrarem:

8.2.5. Teorema. *Teorema de Grötzsch.*

Si G és planar i sense triangles, aleshores $\chi(G) \leq 3$.

Tema 9

Teoria de grafs extremals

L'objectiu principal de la teoria de grafs extremals és l'estudi dels anomenats grafs extremals: grafs maximals respecte el nombre d'arestes que no continguin cap còpia d'un cert graf H com a subgraf.

9.1 Grafs sense triangles

Comencem preguntant-nos quantes arestes pot tenir un graf de n vèrtexs que no contingui cap triangle. Un primer exemple seria $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, que té $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ arestes. Tot seguit, veurem que aquesta fita és òptima.

9.1.1. Lema. Si xy és una aresta en un graf de n vèrtexs sense triangles, aleshores $d(x) + d(y) \leq n$.

Demostració. Només cal observar que x i y no poden tenir cap veí en comú, ja que això causaria un triangle. Per tant, $(d(x) - 1) + (d(y) - 1) \leq n - 2$, d'on es dedueix el resultat. \square

9.1.2. Teorema. *Teorema de Mantel.*

Un graf Γ de n vèrtexs sense triangles té, com a molt, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ arestes.

Demostració. Sigui A un conjunt de vèrtexs independent de mida màxima (i.e. no hi ha cap aresta entre vèrtexs de A), amb $|A| = a$. Atès que Γ no té cap triangle, els veïns d'un vèrtex x donat formen un conjunt independent, i per tant $d(x) \leq a$ per a tot vèrtex x .

Sigui $B = V(\Gamma) \setminus A$, amb $|B| = b$. Atès que tota aresta ha de ser incident a algun vèrtex de B , el nombre d'arestes m satisfà:

$$m \leq \sum_{x \in B} d(x) \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

on a l'última igualtat hem usat la desigualtat entre la mitjana geomètrica i l'aritmètica. Se segueix el resultat, ja que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n^2}{4}$ si n és parell i $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{1}{4}(n^2 - 1)$ si n és imparell. \square

Finalment, ens preguntem quins són tots els casos d'igualtat. Per al cas on n és parell, la igualtat requereix que totes les arestes connectin un vèrtex de A i un de B , $d(x) = a$ per a tot vèrtex x de B , i que

$$ab = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \implies a = b = \frac{n}{2},$$

com es pot comprovar. Així, l'únic cas possible és $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, que és el que havíem trobat abans. Un argument anàleg ens porta a que $K_{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}}$ és el cas òptim per a n senar.

9.2 Grafs sense subgrafs complets

Tot seguit, generalitzem el resultat anterior per a grafs que no continguin cap subgraf complet K_{r+1} . Si abans hem partit el graf en dues parts per evitar triangles, sembla raonable que ara partim el graf en r parts per evitar que aparegui K_{r+1} .

9.2.1. Definició. Un graf multipartit o r -partit és un graf G els vèrtexs del qual es poden partir en r conjunts independents. Equivalentment, G és r -partit si és r -colorejable.

Pel principi del colomar, sempre que seleccionem $r + 1$ vèrtexs d'un graf r -partit n'existiran dos que caiguin a la mateixa part, i per tant no estaran connectats per una aresta. Si volem que un graf r -partit tingui el màxim nombre d'arestes, haurem de repartir els vèrtexs de manera que les parts siguin tan iguals com sigui possible (amb $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ vèrtexs segons el cas). Aquest graf tindrà, aproximadament, $\frac{1}{2}n(n - \frac{n}{r}) = \frac{1}{2}n^2(1 - \frac{1}{r})$ arestes.

9.2.2. Definició. Un graf de Turán és un graf $T_{n,r}$ de n vèrtexs i r -partit amb el màxim nombre d'arestes. Denotarem $t_{n,r} = |E(T_{n,r})|$.

9.2.3. Teorema. *Teorema de Turán.*

Un graf amb n vèrtexs que no contingui K_{r+1} té, com a molt, $t_{n,r}$ arestes.

Demostració. Sigui Γ un graf amb nombre maximal d'arestes que no contingui K_{r+1} . El pas clau serà demostrar que, en Γ , la no-adjacència és una relació d'equivalència. Les propietats reflexiva i simètrica són immediates (i certes en general). Quant a la transitiva, suposem que x no és adjacent a y , i que y tampoc ho és a z , però que $xz \in E(\Gamma)$. Considerem dos casos:

- $d(y) < d(x)$ (o, simètricament, $d(y) < d(z)$). Construïm el graf Γ' , obtingut a partir de Γ esborrant y i afegint una còpia x' de x (i.e. x' té les mateixes adjacències que x , i ambdós vèrtexs no estan connectats). El nou graf Γ' no conté cap còpia de K_{r+1} , ja que aquesta còpia hauria de contenir tant x com x' , però aquests dos vèrtexs no estan connectats. Però Γ' té més arestes que Γ , contradient la maximalitat.
- $d(y) \geq d(x), d(z)$. Fem el mateix procediment que abans, però ara esborrant x, z i afegint dues còpies y', y'' . El graf obtingut Γ' té, com a mínim, una aresta més que Γ , ja que x i z estaven connectats, i Γ' no conté K_{r+1} . Altra vegada, contradicció.

Per tant, la no-adjacència és una relació d'equivalència. Per tant, podem dividir el graf en diferents parts, on cada part conté vèrtexs no adjacents entre ells. Com a molt, podem tenir r parts: si en tinguéssim $r + 1$, podríem agafar $r + 1$ vèrtexs de cadascuna de les $r + 1$ parts diferents, i tots estarien connectats entre sí. Per tant, hem de tenir com a molt r parts, i com que tenir més parts ens permet tenir més arestes, podem considerar que Γ és r -partit.

Si volem que Γ tingui el màxim nombre d'arestes, hem de distribuir els vèrtexs al més equitativament possible en les r parts, i això s'aconsegueix amb un graf de Turán. \square

9.3 Teorema d'Erdős-Stone

Fins ara, ens hem restringit a estudiar alguns casos particulars de subgrafs prohibits. El Teorema d'Erdős-Stone dona una fita asimptòtica per a grafs H generals.

9.3.1. Definició. Donat un graf H , definim $ex(n, H)$ com el màxim nombre d'arestes que pot tenir un graf de n vèrtexs que no contingui H com a subgraf.

9.3.2. Teorema. *Teorema d'Erdős-Stone.*

Per a tot $\varepsilon > 0$, existeix n_0 tal que per a tot $n \geq n_0$, se satisfà:

$$\frac{1}{2}n^2 \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \varepsilon \right) \leq ex(n, H) \leq \frac{1}{2}n^2 \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon \right)$$

La demostració ve donada en una sèrie d'exercicis del curs, i no la farem aquí.

9.3.3. Exemple. Si $H = K_{r+1}$, com hem fet abans, tenim que $\chi(H) - 1 = r$ i, per tant, recuperem la fita anterior. Així, el teorema d'Erdős-Stone generalitza el teorema de Turán.

Observem que si $\chi(H) \neq 2$, el teorema ens dona el comportament asimptòtic de $ex(n, H)$, que és una constant coneguda multiplicada per n^2 . En canvi, si $\chi(H) = 2$, el teorema pràcticament no ens dona informació més enllà que la dependència serà menor que n^2 . Així, en el cas bipartit encara hi ha feina a fer.

9.4 Grafs sense subgrafs bipartits complets

9.4.1. Exemple. El cas més senzill a considerar és $H = K_{1,t}$, en el qual l'únic que s'ha d'evitar és que algun vèrtex tingui t veïns. Per tant, si aconseguim que tots els vèrtexs tinguin grau $t - 1$, hauríem de tenir $ex(n, K_{1,t}) \approx \frac{1}{2}n(t - 1)$.

9.4.2. Exemple. Considerem un altre cas petit (però més complicat), que és $H = K_{2,2} = C_4$. Construïm l'exemple inspirant-nos en geometries finites: Sigui (P, L) un espai projectiu d'ordre q . Construïm un graf bipartit, on els vèrtexs de cada part són P i L respectivament, i posem una aresta entre p i l si, i només si, $p \in l$. Com que dos punts estan units per una sola recta, aquest graf no conté cap còpia de $K_{2,2}$. En aquest graf,

$$\left. \begin{array}{l} n = 2(q^2 + q + 1) < 2(q + 1)^2 \\ m = \frac{1}{2}n(q + 1) \end{array} \right\} \implies m > \left(\frac{1}{2}n \right)^{3/2}.$$

9.4.3. Lema. Siguin t, d_1, \dots, d_n enters no negatius. Aleshores:

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{t} \geq n \binom{\lfloor \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \rfloor}{t}.$$

La demostració es deixa com a exercici. S'indica que la demostració es pot fer per inducció en t .

9.4.4. Teorema. Per a tot $\varepsilon > 0$, existeix n_0 tal que per a tot $n \geq n_0$, tot graf amb n vèrtexs que no contingui $H = K_{t,s}$ té, com a molt, $\frac{1}{2}(s - 1)^{1/t}(1 + \varepsilon)n^{2-1/t}$ arestes.

Demostració. Sigui Γ un graf amb n vèrtexs, m arestes i sense $K_{t,s}$. Sigui N el nombre de còpies de $K_{1,t}$ contingudes en Γ . Un conjunt donat de t vèrtexs pot tenir, com a molt, $s - 1$ veïns en comú, ja que sinó es crearia una còpia de $K_{t,s}$. Vist d'una altra manera, aquests t vèrtexs poden formar part de, com a molt, $s - 1$ còpies de $K_{1,t}$. En conseqüència, $N \leq \binom{n}{t}(s - 1)$.

Observem que un vèrtex de grau $d(v)$ contribueix en $\binom{d(v)}{t}$ còpies diferents de $K_{1,t}$. Així, si $\delta = \frac{2m}{n}$ és el grau mitjà dels vèrtexs, pel lema es té:

$$N = \sum_{v \in V(\Gamma)} \binom{d(v)}{t} \geq n \binom{\lfloor \delta \rfloor}{t}.$$

Suposem, buscant una contradicció, que $m > \frac{1}{2}(s - 1)^{1/t}(1 + \varepsilon)n^{2-1/t}$. Així, s'ha de tenir

$$\lfloor \delta \rfloor > (s - 1)^{1/t}(1 + \varepsilon)n^{1-1/t} - 1.$$

Tenint en compte les dues desigualtats obtingudes anteriorment per N , i considerant únicament el primer terme en n en els binomials, arribem a:

$$(1 + \varepsilon)^{t-1} \frac{n^t}{t!} (s - 1) > N > \frac{n}{t} (s - 1) (1 + \varepsilon)^t n^{t-1} - Cn^{t-1+t/1},$$

sent C una constant que no ens interessa saber. Reagrupant termes,

$$Cn^{t-1+t/1} > \frac{n^t}{t!} (s - 1) (1 + \varepsilon)^{t-1} (1 + \varepsilon - 1),$$

que és una contradicció per a n suficientment gran. \square

La fita que ens dona aquest teorema per $H = K_{2,2}$ és $ex(n, H) < \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)n^{3/2}$. Abans, hem construït un graf amb aproximadament $\frac{1}{2\sqrt{2}}n^{3/2}$ arestes, que té l'exponent que toca, però una constant que no és òptima. Tot seguit, farem una construcció que ens portarà a l'òptim.

9.4.5. Definició. Donat un pla projectiu $\Pi = (P, L)$, una polaritat és una bijecció $\sigma: P \rightarrow L$ tal que $x \in \sigma(y) \iff y \in \sigma(x)$.

Recordem que en $PG(2, q)$, els punts són $P = \{(x_1 : x_2 : x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_q^3\}$, on $(x_1 : x_2 : x_3)$ és el subespai 1-dimensional generat per (x_1, x_2, x_3) , i les rectes són de la forma $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0$, $a_i \in \mathbb{F}_q$. Definim la següent aplicació:

$$\sigma: (x_1 : x_2 : x_3) \mapsto \ker(x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3).$$

L'aplicació és clarament bijectiva, i és una polaritat:

$$y \in \sigma(x) \iff x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \iff x \in \sigma(y).$$

Construïm ara un graf Γ amb vèrtexs P , i sigui σ una polaritat (per exemple, l'anterior). A Γ , posem una aresta entre x i y si, i només si, $x \in \sigma(y)$ (i, per tant, $y \in \sigma(x)$). Atès que $n = q^2 + q + 1$, i que cada punt és incident a $q + 1$ rectes, el nombre d'arestes m satisfà:

$$m > \frac{1}{2}nq \sim \frac{1}{2}n^{3/2}.$$

Així, aquesta nova construcció assoleix l'òptim del teorema. No obstant, cal remarcar que el teorema no ens garanteix que la fita sigui òptima: ens dona una fita superior, però no inferior. Tot seguit, farem una construcció probabilística que ens donarà una fita inferior.

9.4.6. Teorema. Per a una constant c i una n suficientment gran, existeix un graf de n vèrtexs que no conté $K_{t,s}$ i té $cn^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}$ arestes.

Demostració. Agafem un graf amb n vèrtexs, de manera que posem una aresta entre dos vèrtexs qualssevol amb probabilitat p . Sigui Y la variable aleatòria que compta el nombre d'arestes, i sigui X la variable aleatòria que compta el nombre de còpies del subgraf $K_{t,s}$. Es té:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \binom{n}{2}p > cn^2p \\ \mathbb{E}[X] &= \binom{n}{t} \binom{n-t}{s} p^{st} < c'n^{s+t}p^{st}.\end{aligned}$$

Com que l'esperança és lineal, s'ha de tenir:

$$\mathbb{E}[Y - X] > cn^2p - c'n^{s+t}p^{st}.$$

Tot seguit, escollim una p per tal que el membre de la dreta doni com a resultat $\frac{1}{2}cn^2p$. Operant, arribem a que $p = c'n^{\frac{2-(s+t)}{st-1}}$. Aleshores,

$$\mathbb{E}[Y - X] > \frac{1}{2}cn^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}.$$

Per tant, existirà algun graf Γ tal que $Y - X > \frac{1}{2}cn^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}$. A Γ , eliminem una aresta de cada còpia de $K_{t,s}$ que hi hagi. Aquesta operació manté constant el valor de $Y - X$, i continua fins que $X = 0$. D'aquesta manera, ens quedarà un graf sense còpies de $K_{t,s}$ i amb $m > cn^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}$ arestes. \square

Aquesta fita ens dona, per exemple, $cn^{4/3}$ per $K_{2,2}$, que és pitjor del que ja sabíem. En canvi, aquesta és la millor fita que es coneix pel cas $t \geq 6$, $s \leq (t-1)!$.

9.5 Grafs sense cicles parells

Finalment, ens preguntem pels grafs que no contenen cap còpia de C_{2t} . El cas de $C_4 = K_{2,2}$ ja el coneixem d'abans. Així doncs, ens preguntem pel següent cas, que és C_6 . Farem una construcció basant-nos en l'espai projectiu de 3 dimensions.

En primer lloc, considerem que tenim una polaritat σ , aquest cop definida dels punts als plans de $PG(3, q)$. Assumirem, a més, que $x \in \sigma(x)$ per a tot punt x . Considerem una estructura d'incidència (P, L) tal que P són els punts de $PG(3, q)$ i L són les rectes tals que per a tot $x \in L$, $L \subseteq \sigma(x)$. Comptant parelles (x, l) tals que $x \in l$, tenint en compte que $\sigma(x)$ és un pla projectiu, s'arriba a

$$|P|(q+1) = |L|(q+1) \implies |P| = |L|.$$

A més, per 1.8.3, s'ha de tenir $|P| = |L| = \frac{q^4-1}{q-1} = q^3 + q^2 + q + 1$. Hom pot comprovar que, per aquesta estructura d'incidència, per a tota parella x, l tal que $x \notin l$, existeix un únic punt $y \in l$ que està alineat amb x . Per tant, aquesta estructura d'incidència no té triangles.

9.5.1. Definició. Un quadrangle generalitzat és una estructura d'incidència amb la propietat que per a tot $(x, l) \in (P, L)$ tal que $x \notin l$, existeix un únic punt $y \in l$ alineat amb x .

9.5.2. Exercici. Completeu els detalls que s'han deixat.

Manca comprovar que existeix alguna polaritat tal que $x \in \sigma(x)$. Definim la següent aplicació:

$$\sigma(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = \ker(x_1X_2 - x_2X_1 + x_3X_4 - x_4X_3).$$

És fàcil comprovar que σ és polaritat, i que $x \in \sigma(x)$. A la vista dels resultats, construïm un graf bipartit Γ , amb parts P, L , de manera que posem una aresta si, i només si, $x \in l$. Aquest graf no conté C_6 , ja que un C_6 es correspondria amb un triangle a l'estructura d'incidència original (comproveu-ho).

Finalment, observem que $n \approx 2q^3$, i $m \approx \frac{1}{2}nq \approx cn^{4/3}$. En general, tenim la següent fita superior:

9.5.3. Teorema. Un graf amb n vèrtexs que no contingui C_{2t} té, com a molt, $cn^{1+1/t}$ arestes, per a certa constant c .

Als problemes de l'assignatura, construirem amb el mètode probabilístic un graf amb n vèrtexs i sense C_{2t} que tindrà, com a mínim, $c'n^{1+1/(2t-1)}$ arestes.

Índex alfabètic

- AB*-connector, 41
- AB*-separador, 41
- acció d'un grup, 29
- aparellament, 45
- aparellament estable, 48
- arbre
 - binari, 19
 - etiquetat arrelat, 28
 - pla, 19
- bloc d'un graf, 40
- camí
 - alternat, 45
 - augmentador, 45
- camí de Dyck, 18
- classe
 - combinatòria, 14
 - combinatòria etiquetada, 23
- cobertura de vèrtexs, 46
- coloració
 - de vèrtexs, 57
- coloració d'un conjunt, 31
- component
 - connex d'un graf, 39
 - senar, 49
- composició d'un enter, 15
- condició de Hall, 1
- connectivitat
 - d'un graf, 39
 - per arestes, 44
- contracció d'una aresta, 40
- desarranjament, 25
- espai
 - projectiu, 11
- espai lineal, 8
- estructura d'incidència, 7
 - dual, 7
- funció
 - generadora, 14
 - generadora exponencial, 23
- graf
 - k*-aresta-connex, 44
 - k*-connex, 39
 - connex, 39
 - de Turán, 62
 - dual, 60
 - multipartit, 62
 - planar, 51
- involució, 26
- matriu doblement estocàstica, 4
- nombre cromàtic, 57
- nombres
 - de Catalan, 18
 - de Stirling, 27
- ordre d'un pla projectiu finit, 9
- partició
 - d'un conjunt, 17, 27
 - d'un enter, 16
- permanent, 3
- pla
 - afí, 10
 - projectiu, 9
- polaritat, 64
- polinomi d'índexs de cicles, 32
- producte de quadrats llatins, 5
- QLMO, 5
- quadats llatins
 - mútuaament ortogonals, 5
- quadrat llatí, 3
- quadrats llatins
 - ortogonals, 5
- rectangle llatí, 3

separació d'un graf, [39](#)

separador d'un graf, [39](#)

sistema

 comú de representants distints, [43](#)

sistema de representants distints, [1](#)

SRD, [1](#)

subdivisió d'una aresta, [52](#)

subgrup estabilitzador, [30](#)

sèrie formal de potències, [13](#)

vèrtex de tall, [40](#)

òrbita d'una acció, [29](#)