

1 Cinemàtica

Introducció

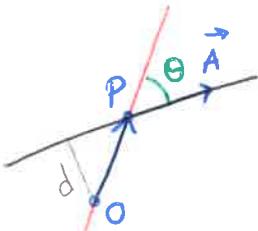
Treballarem a \mathbb{R}^3 en la base natural $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ($\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$)

Tenim un prod. escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

norma: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

prod. vectorial: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$
 $= \text{Àrea}(\vec{a}, \vec{b})$

Moment: Fixat un origen O , $\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{A}$ ($\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O}'O \times \vec{A}$)



Com que $|\vec{A}| = ct$, observem que:

$$0 = \frac{d|\vec{A}|^2}{ds} = \frac{d\vec{A}^2}{ds} = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{ds}$$

És a dir, $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{ds}$ són ortogonals.

Descripció del moviment

Utilitzarem partícules puntuals.

En un temps donat, una partícula ocupa una posició $P \in \mathbb{R}^3$, especificada pel vector $\vec{r}(t) = \vec{OP}$ en un sist. de referència $R = \{O; e_1, e_2, e_3\}$

Aquesta funció $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ s'anomena trajectòria

Def: $\vec{r} :=$ trajectòria

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} :=$ velocitat

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} :=$ acceleració

Def: Donada una corba $\vec{r}(t)$, definim l'arc com a:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau$$

que és la longitud de la corba amb origen en el punt $\vec{r}(t_0)$

Si derivem aquesta expressió obtenim

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| = |\vec{v}(t)|$$

Llavors, $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \vec{t}$ vector unitari tangent

Def: Degut que $\frac{d\vec{t}}{ds}$ és ortogonal a \vec{t} , definirem la normal principal:

$$\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} / \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|$$

† la binormal $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

Obs: $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ (Triedre de Frénet) és una base ortonormal.

Def: Definim $\kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|$ la curvatura de la corba

Definim $\rho = \frac{1}{\kappa}$ el radi de curvatura

Definim $P + \rho \vec{n}$ el centre de curvatura

Prop: En el triedre de Frénet,

$$1) \vec{v} = v\vec{t}, \quad 2) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

\vec{a}_t = acc. tangencial
 \vec{a}_n = acc. normal

Dem:

1) Trivial per la def. de \vec{t} .

$$2) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{t}) = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v^2 \kappa \vec{n} = \\ = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$

□

Moviment circular

Considerem $\vec{r}(t) = R(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ on $\theta(t)$ és l'angle.

Sabem $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, amb velocitat angular

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad \left(\ddot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \quad (s(t) = R\theta(t))$$

Tenim que $\vec{\alpha}(t) = R \frac{d^2\theta}{dt^2} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) + R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (-\cos \theta, -\sin \theta, 0)$,

on $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ és la acceleració angular $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$

Segons la direcció de l'angle de moviment i per la regla de la mà dreta, $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega(t))$ amb un gir en direcció positiva (antihorari).

De la mateixa manera, $\vec{\alpha}(t) = (0, 0, \alpha(t))$

Prop: $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$

Dem:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -R\omega \sin\theta \vec{i} + R\omega \cos\theta \vec{j} = R\omega (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

III
 $\vec{v}(t)$

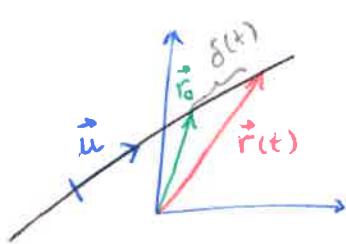
Derivant, obtenim:

$$\vec{\alpha}(t) = \underbrace{\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)}_{\text{comp. tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t))}_{\text{comp. normal}}$$

$$\vec{\alpha}_t(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = R\omega (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\vec{\alpha}_n(t) = \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)) = R\omega^2 (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$$

Moviment rectilini



$$\left. \begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \delta(t) \vec{u} \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\delta(t)}{dt} \vec{u} = |\vec{v}(t)| \vec{u} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} \vec{u} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \vec{v} \text{ paral·lela} \\ \vec{a} \text{ paral·lela} \\ \downarrow \\ \vec{a} = \vec{a}_t \end{array}$$

Suposem $\vec{a} = a \vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = a \vec{u}$ (MRUA)

Llavors, $d\vec{v} = a \vec{u} dt \Rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = a t \vec{u}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2} a t^2 \vec{u}$$

Ex:

$$\vec{a} = -g \vec{j}$$
 (acc. de la gravetat)

$$\vec{v}_0 = V_{0x} \vec{i} + V_{0y} \vec{j}$$

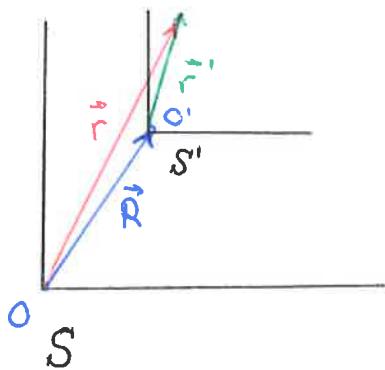
$$\vec{v}(t) = V_{0x} \vec{i} + (V_{0y} - gt) \vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = V_{0x} t \vec{i} + (V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{j} \text{ és una trajectòria parabòlica?}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= V_{0x} t \\ y(t) &= V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow t = \frac{x}{V_{0x}} \hookrightarrow y(t) = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{V_{0x}^2} x^2$$

(eq. paràbola)

Sistemes de referència



Sigui S, S' dos sistemes de referència amb els eixos paral·lels

$$O' \{ \vec{R}, \vec{V}, \vec{A} \}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{R} + \vec{r}'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V} + \vec{v}'(t)$$

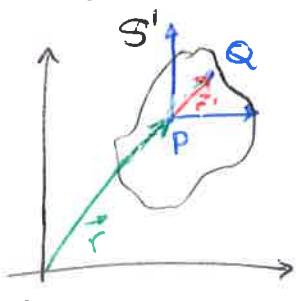
$$\vec{a}(t) = \vec{A} + \vec{a}'(t)$$

(Transformació
de Galileu)

eixos paral·lels i const
 $\approx V = ct$

Sòlid rígid pla

Sigui un sòlid rígid, volem estudiar la distribució de les velocitats sobre cada punt del sòlid.



$$\bullet \vec{v}_{Q_{S'}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{S'}$$

$$\vec{v}_{Q_S} = \vec{v}_P + \vec{v}_{Q_{S'}} \rightarrow \vec{v}_{Q_S} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_{Q_S} - \vec{r}_P)$$

$$\vec{r}_S = \vec{r}_{S'} + \vec{r}_P$$

$$\bullet \vec{a}_{Q_S} = \vec{a}_P + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_{Q_S} - \vec{r}_P) + \vec{\omega} (\vec{\omega} \times (\vec{r}_{Q_S} - \vec{r}_P))$$

$$\vec{r}_{Q_S}$$

$$\vec{r}_{S'}$$

Ara trobarem el centre de rotació del sòlid:

$$\text{sabem (de MCV) que } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r} = \vec{a}_n$$

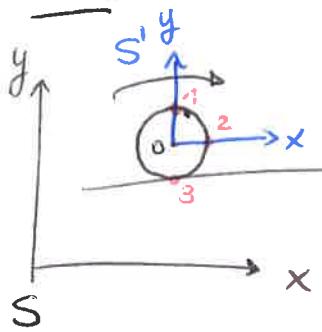
$$\text{llavors, sigui } \vec{v}_P = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \times (\vec{v}_P \times \vec{\omega})) = \frac{1}{\omega^2} (\omega^2 \vec{v}_P) = \vec{v}_P \quad \checkmark$$

$$\text{Volem } \vec{\Theta} = \vec{\omega} \times (\vec{v}_P \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}_q - \vec{r}_P) \Rightarrow \text{perquè } \vec{v}_P = \vec{0} \text{ llavors}$$

$$\Rightarrow \vec{\Theta} = \vec{\omega} \times \left(\frac{\vec{v}_P \times \vec{\omega}}{\omega^2} + \vec{r}_q - \vec{r}_P \right) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_q = \vec{r}_P + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_P}{\omega^2}}$$

Aquesta equació ens dóna el camp de velocitats, : llavors q s'anomena centre instantani de rotació.

Ex:



$$\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$$

$$\vec{V}_o = WR \vec{i}$$

$$|\vec{V}_e = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_{S'}|$$

$$\vec{V}_i = WR \vec{i} + (0, 0, -\omega) \times (0, R, 0) =$$

$$= (WR, 0, 0) + (WR, 0, 0) = 2WR \vec{i}$$

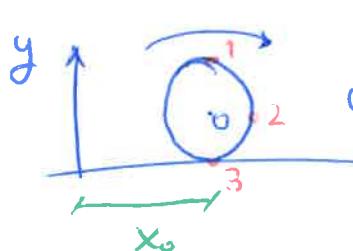
$$\vec{V}_2 = WR \vec{i} - WR \vec{j} = WR(1, -1, 0)$$

$$\vec{V}_3 = WR \vec{i} - WR \vec{i} = \vec{0}$$

Llavors, \vec{V}_3 és el centre instantani de rotació

Observem que obtenim el mateix resultat de la següent manera:

Prenem S com a:



$$\vec{r}_o = (x_0, R, 0)$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$$

$$\vec{V}_o = (WR, 0, 0)$$

centre instantani
de rotació

Volem aplicar que $\vec{r}_{CIR} = \vec{r}_p + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_p}{\omega^2}$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_o = -\omega^2 R \vec{j} \implies \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_p}{\omega^2} = -R \vec{j}$$

$$\vec{r}_{CIR} = (x_0, R, 0) + (0, -R, 0) = (x_0, 0, 0) \equiv \vec{r}_3$$

Llavors, ③ és el CIR

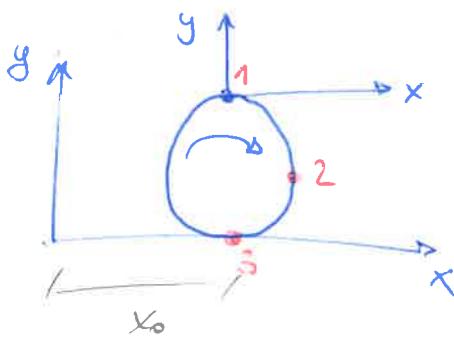
Ex Comprovar que si $O_{S'} = ①$ llavors ens dóna

el mateix

$$\left(\begin{array}{l} \vec{\omega} = (0, 0, -\omega) \\ \vec{V}_i = (2WR, 0, 0) \end{array} \right)$$

(EX)

Si prenem ① com a origen de la referència S' , aleshores:



$$\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$$

$$\vec{v}_1 = (2\omega R, 0, 0)$$

$$\vec{r}_1 = (x_0, 2R, 0)$$

vist a l'inici de
l'exercici

$$\vec{r}'_Q := \vec{r}_Q \text{ en ref } S'$$

i) Utilitzem que $\vec{v}_Q = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_Q$

A $Q=1$, sabem que $\vec{v}_1 = (2\omega R, 0, 0)$, pel que no és el CIR.

A $Q=2$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_2 = (2\omega R, 0, 0) + (0, 0, -\omega) \times (R, -R, 0) = (WR, -WR, 0) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ R & -R & 0 \end{vmatrix}$$

A $Q=3$:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{\omega} \times \vec{r}'_3 = 2\omega R \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & -2R & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = \vec{0} \Rightarrow \underline{\underline{\text{③ CIR}}}$$

ii) Apliquem $\vec{r}_{\text{CIR}} = \vec{r}_1 + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_1}{\omega^2}$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 2\omega R & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2\omega^2 R, 0)$$

$$\text{Llavors, } \vec{r}_{\text{CIR}} = \vec{r}_1 + (0, -2R, 0) = (x_0, 2R, 0) + (0, -2R, 0) = (x_0, 0, 0) = \vec{r}_3$$

Per tant, observem que ③ és el CIR

$$\vec{r}_{\text{CIR}} = \vec{r}_2 + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_2}{\omega^2} = (x_0 + R, R, 0) +$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 2\omega R & -2R & 0 \end{vmatrix} = (-\omega^2 R, -\omega R, 0)$$

En resum:

Si prenem O' com a origen de S' es compleix:

$$\vec{r}_{CIR_s} = \vec{r}_q + \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_q}{\omega^2} \quad \forall q \in S$$

2. Dinàmica

Lleis de Newton

- Primera llei de Newton (Llei de la inèrcia)

$\sum F = 0$ si una partícula està en repòs o a $v = ct$.

(Sempre i quan ens trobem en un sist. de ref. inercial)

- Segona llei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Tercera llei de Newton: (Llei d'acció-reacció)
 $-\vec{F}_{ab} = \vec{F}_{ba}$ (Matemàticament, però no físicament vist)

El cavall tira del carro i al revés,
però mentre que $|\vec{F}_{ab}| = |\vec{F}_{ba}|$,
el carro es mou

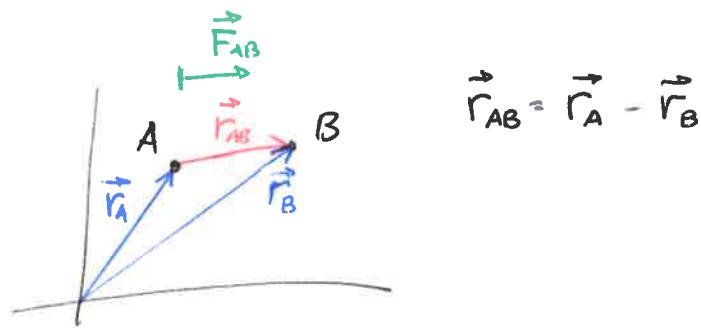
Diferents tipus de forces:

- Força gravitacional (m)
- Força electromagnètica (e^-, p^+)
- Força Nuclear (fble i forta)
- Força elàstica $\vec{F}_{el} = -k\vec{x}$
- Força de fregament $|\vec{F}_f| \leq \mu |\vec{N}|$ (= quan es freguen entre ells)
(en moviment)
- Força de fregament viscos $\vec{F} = -b\vec{v}$
- Força de lligadura: Força necessària i suficient que fan superfícies sobre altres cossos.

Ex: \vec{N} (força normal), normal a la superfície
 \vec{F}_f (fregament), tangent a la superfície

Força gravitacional

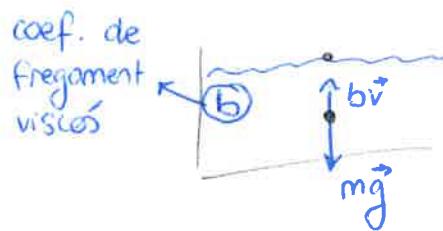
$$\vec{F}_{ab} = -G \frac{m_a m_b}{|\vec{r}_{ab}|^3} \vec{r}_{ab}$$



Def: El pes \vec{P} és la força que fa la Terra sobre els cosos.

$$\vec{P} = -G \frac{M_T \cdot m}{(R+h)^2} \cdot \hat{e} \approx m \cdot \vec{g}, \quad g \approx 9,78 \text{ m/s}^2$$

Suposem que tenim un entorn viscos: Volem trobar la velocitat de mov.



$$ma = mg - bv \rightarrow a = g - \frac{bv}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \gamma v, \quad \gamma = \frac{b}{m}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \gamma v} = \int_0^t dt \rightarrow \left[-\frac{1}{\gamma} \ln(g - \gamma v) \right]_0^v = t \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln \frac{(g - \gamma v)}{g} = -\gamma t \rightarrow 1 - \frac{g}{\gamma} v = e^{-\gamma t} \quad \textcircled{*}$$

Degut a l'acceleració de la gravetat, arribarà una certa velocitat que compleix: $mg = bv$ i, aleshores, $\sum \vec{F} = 0$ i la velocitat es mantindrà constant, ja que la força de viscositat és de lligadura i no la frenarà.

$$mg = bv \rightarrow v_H = \frac{mg}{b} = g/\gamma$$

$$\frac{g}{\gamma} = v_{\max}$$

que pot anotar el cos

Si substituim $V_{\max} = g/\gamma$ a ④:

$$1 - \frac{V}{V_M} = e^{-\gamma t} \rightarrow V(t) = V_M (1 - e^{-\gamma t})$$

velocitat a l' instant t.

Per trobar la posició a l' instant t ens cal integrar:

$$x(t) = \int v(t) dt = \boxed{V_M \left(t + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} \right) = x(t)}$$

⚠ NOVES SI EU !!

Si $\exists U$ tq $\int F(x) dx = U(x)$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dx} = F(x)$$

Forces que depenen de la posició

$$\text{Sabem que } F = ma = m\ddot{x} \Rightarrow F(x) \cdot \dot{x} = m\dot{x} \cdot \ddot{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} = F(x) \cdot \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) = -\frac{dU(x)}{dx} \cdot \dot{x} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) = - \frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = - \frac{dU(x)}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) \right) = 0, \text{ on } \boxed{\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) =: E_{\text{mecànica}}}$$

Per tant, podem parlar d' E_{mec} sempre que $\exists U$ tq $\frac{dU}{dx} = -F(x)$, i observem que E_{mec} és constant, ja que $\frac{d}{dt} E_{\text{mec}} = 0$

Llavors, definim:

$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{cinètica}} := \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \\ E_{\text{potencial}} := U(x) \end{array} \right\} E_{\text{mec}} = E_c + E_p.$$

Def: En aquest cas, si E_{mec} és constant (sempre que $\exists E_p$) direm que F és una força conservativa.

Sabem $\frac{du}{dx} = -F(x)$

Llavors, $U(x) = - \int_{x_0}^x F(z) dz \quad (U(x_0) = 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(x) = - \int_{x_0}^x F(z) dz}$$

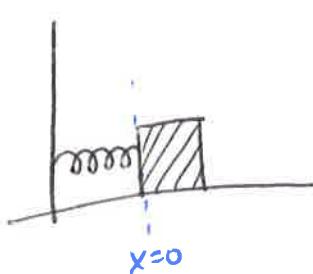
Si prenem $\vec{F}(x) = \vec{P}(x) = m\vec{g}$: ($F(x) = -mg$):

$$U(x) = - \int_{x_0}^x -mg dz \Rightarrow U(x) = mgx$$

Suposant que x és la distància del cos des del terra (altura h)
obtenim la equació que coneixem: $\boxed{E_p = mgh}$

Obs: El pes és força conservativa pq $\exists U$ tq $\frac{du}{dx} = -F(x)$,
 $U = mgx$

Força elàstica



$$F(x) = -kx$$

Llavors, $U(x) = - \int_0^x -kz dz = \boxed{\frac{1}{2} kx^2 = E_{pe}}$

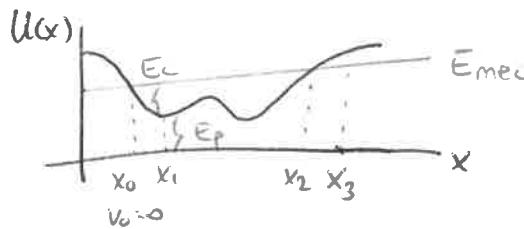
$$E_{mec} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

si estarem la molla una distància $x=A$ i ens quedem allà,
tindrem $E_m = E_{pe}$:

$$E_{mec} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

Si deixem anar el cos, obtindrem $E_{mec} = E_c$ en $x=0$, amb una
certa velocitat màxima assolida a $x=0$

Prenem la gràfica següent:



- A x_3 no es pot ambar, ja que $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ sempre!

- A x_0 tenim $v_0 = 0$, perquè l' $E_{mec} = E_p$
- A x_1 s'està desplaçant, pq $E_c \neq 0$
- A x_2 tornem a tenir $E_c = 0$, i com que $F = -\frac{dU}{dx}$, a x_2 la gràfica té pendent positiu, pel que actua una força negativa que la fa tornar enrere.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \text{ sempre!}$$

frequència angular

resolem la EDO

Moviment oscil·lació harmoníca

$$\text{Sigui } F(x) = -kx.$$

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\begin{aligned} \text{on } x(0) = A \sin \varphi_0 \\ v(0) = A \omega \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} x_0^2 &= A^2 \sin^2 \varphi_0 \\ v_0^2 &= A^2 \omega^2 \cos^2 \varphi_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{x_0 \omega}{v_0}$$

Busquem el periode de oscil·lació:

$$\text{Sabem que } \sin(\omega t) = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin(\omega(t+T)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi = \omega T \rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = T \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (S)$$

$$\text{Obs: } \ddot{x} = A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Llavors, tot té sentit.

- Degut que aquesta força elàstica que actua és una força conservativa, té sentit parlar de l' energia mecànica .

$$\text{La } E_p \equiv U(x) \text{ és } U(x) = - \int -kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{Llavors, } E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(A^2\omega^2 \cos^2 \omega t) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t$$

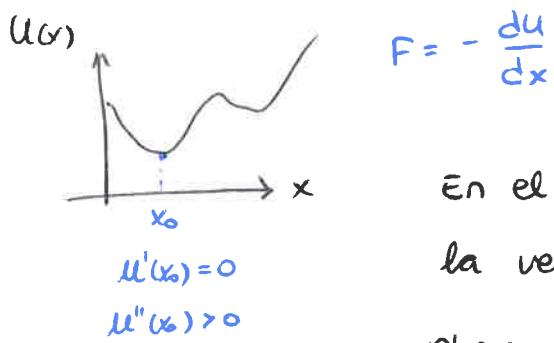
$$\hookrightarrow E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} k A^2$$

Com que no depèn de cap variable, l' E_{mec} és constant
(perquè han actuat forces conservatives)

Una altra possible fórmula per trobar la velocitat seria utilitzant la conservació de l'energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Observem la gràfica següent:



En el punt x_0 , l' E_p és mínima i, per tant,
la velocitat és màxima.

Observem però, que $U'(x_0) = F = 0$
Llavors, $a(x_0) = 0$.

Tenim que $x = x_0 + y$, y un punt proper a x_0 . tq $\ddot{x} = \ddot{y}$, pq $\dot{x}_0 = 0$

$$F(x_0+y) = m\ddot{x} = m\ddot{y}$$

Per Taylor: $F(x_0+y) = F(x_0) + F'(x_0)y + O(y^2) \approx -U''(x_0)y$

$$\text{Llavors, } m\ddot{y} = F(x_0+y) = -U''(x_0)y \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} = -U''(x_0)y}$$

eq. de mvhs.

Dinàmica a \mathbb{R}^3

Traslladarem els conceptes a \mathbb{R}^3 .

Def: Donada una força, definim el treball que fa una之力 sobre una partícula que es mou per un cert recorregut (mesurat en Joules)

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{e}$$

$(1J = 1N \cdot m)$
 $"$
 $1 \text{ kg} \frac{m^2}{s^2}$

Def: La potència és el treball realitzat per unitat de temps.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

(Mesurat en Watts)

Degut que ens trobem a \mathbb{R}^3 , ara tenim que:

$$E_C = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

Llavors, podem fer $\frac{dE_C}{dt} = m\vec{v} \cdot \vec{a} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Si \exists una之力 conservativa tq $U(x) = - \int F dx$, llavors:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

Volem veure ara que $\frac{d}{dt}(E_C + U(\vec{r})) = 0$, com vam veure a \mathbb{R} .

Ho traslladem a \mathbb{R}^3 :

$$\frac{dU(\vec{r})}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \vec{\nabla} U(\vec{r}) \cdot \vec{v} = -\vec{F} \cdot \vec{v}$$

Aleshores, $\frac{dE_C}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(E_C + U(\vec{r})) = \vec{F} \cdot \vec{v} - \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$.

Llavors, es conserva l' E_{mec} . (expressada en \mathbb{R}^3)

Com hem vist abans,

$$\frac{dE_C}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow dE_C = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \rightarrow E_C(t_2) - E_C(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{E_C(r_2) - E_C(r_1) = W_{r_1 \rightarrow r_2}}$$

Obs: Aquesta identitat és certa per a totes les forces, encara que no siguin conservatives.

(Teorema de les Forces Vives)

Vegem què passa si tenim forces conservatives i no conservatives:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

$$E_C(r_2) - E_C(r_1) = W_{r_1 \rightarrow r_2}^c + W_{r_1 \rightarrow r_2}^{nc}$$

$$W^c = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{\nabla}U(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{r_1}^{r_2} du = \underline{U(r_1) - U(r_2)}$$

$$\text{Llavors, } [E_C(r_2) + E_p(r_2)] - [E_C(r_1) + E_p(r_2)] = W_{r_1 \rightarrow r_2}^{nc}$$

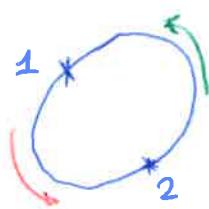
$$\text{Per tant, } \boxed{\Delta E_{\text{mec}} = W^{nc}}$$

Ex: (Forces no conservatives)

- Forces de lligadura
- Força de fregament

Prop: El treball de les forces conservatives només depèn dels punts inicial i final.

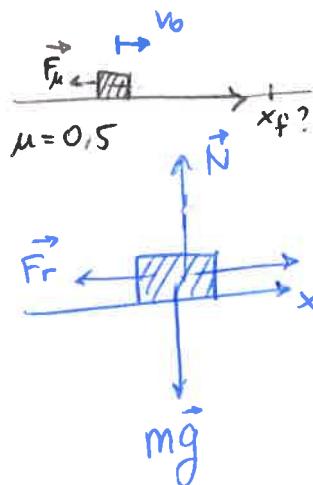
Dem:



$$W_{1 \rightarrow 1}^c = U(1) - U(1) = 0 = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Llavors, $W_{1 \rightarrow 2}^c$ no depèn del camí. \square

(Ex)



$$F_f = \mu N \quad (\text{Ja que } v_0 \neq 0)$$

$$F_f = \mu (mg)$$

$$\sum F = 0 \rightarrow ma = -\mu mg \rightarrow a = -\mu g$$

Podem aplicar cinemàtica (MRUA) i trobar Δx .

(Ex)

Utilitzarem el Teorema de les forces活es: ($\Delta E_c = W$)

$$W_{1 \rightarrow 2} = -\mu mg \Delta x = 0 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mu mg \Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

3. Dinàmica de sistemes puntuals

Moment lineal

Def: El moment lineal (o la quantitat de mouiment) és:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

on $\boxed{\vec{P} = m \cdot \vec{v}}$ és el moment lineal

Def: L' impuls mecànic $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt} dt = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \Delta \vec{P}$

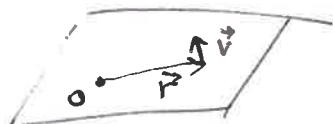
és l' increment de quantitat de mouiment que rep una partícula.

Def: Donada una força que actua sobre un punt P , definim el moment de la força respecte el punt O com a:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_A = \vec{AO} \times \vec{F} + \vec{M}_O$$

Moment angular

Def: El moment angular de la partícula sobre O



és: $\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v}} = \vec{r} \times \vec{P}$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \times \vec{P} = \vec{L}_O + (\vec{r}_O - \vec{r}_A) \times \vec{P}$$

Vegem la relació entre el moment angular i el moment de les forces:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \underline{\vec{v} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

Llavors, $\boxed{\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}}$

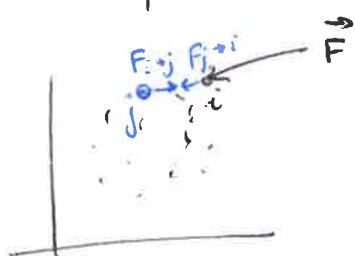
Suposem que A és un punt en moviment.

Llavors:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \frac{d\vec{l}_o}{dt} + (\vec{v}_o - \vec{v}_A) \times \vec{P} + \underbrace{(\vec{r}_o - \vec{r}_A)}_{AO} \times \vec{F} \\ \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \vec{M}_o + \vec{AO} \times \vec{F} + (\vec{v}_o - \vec{v}_A) \times \vec{P} \\ \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \vec{M}_A - \vec{v}_A \times \vec{P} \quad (\vec{v}_o = 0) \rightarrow 0 \text{ fix}\end{aligned}$$

Obs: $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A$ només si A és fix

Suposem que tenim un sistema de partícules:



Cada una de les partícules del sistema genera una força a la nostra partícula, a més de les possibles forces extènors.

Llavors, $m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}^{\text{ext}} + \sum \vec{F}^{\text{int}}$

Def: El centre de massa és: $\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$

si $M = \sum_i m_i$: $M \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

$$M \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{P}_i = \vec{P} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = M \vec{v}_{CM}}$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \vec{F}_j^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_j^{\text{int}} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i,j=1}^N \vec{F}_{i \rightarrow j}^{\text{int}} = \vec{F}^{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{M \vec{a}_{CM} = \vec{F}^{\text{ext}}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}} \quad \Leftarrow$$

* la llei de conservació

$$\frac{dP}{dt} = \dot{T}_L^{\text{ext}}$$

Si no hi ha forces extènors, es conserva la quantitat de mouiment del sistema

Def: El momento angular respecte O

$$\vec{L}_g = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{g_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Si denuem:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times [\vec{F}_i^{ext} + \underbrace{\vec{F}_i^{int}}_{=0}] = \vec{M}_o$$

Considerem ara un punt mòbil A

$$\vec{L}_A = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_A) = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_A}_{\vec{L}_0} -$$

$$- \underbrace{\sum_i \vec{r}_A \times m_i \vec{v}_i}_{\text{"}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_A \times m_i \vec{v}_A}_{\text{"}}$$

$$\vec{r}_A \times \sum_i m_i \vec{v}_i \quad \vec{r}_A \times M \vec{v}_A$$

$$\vec{r}_A \times \vec{p}$$

$$\text{Llavors, } \vec{L}_A = \vec{L}_0 - M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_A - \vec{r}_A \times \vec{P} + M \vec{r}_A \times \vec{v}_A = \\ = \vec{L}_0 + M (\vec{r}_A - \vec{r}_{CM}) \times \vec{v}_A - \vec{r}_A \times \vec{P}$$

Si $A = CM$,

$$\begin{aligned}\vec{L}_{CM} &= \vec{L}_0 - \vec{r}_{CM} \times \vec{P} \\ \vec{L}_0 &= \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}\end{aligned}$$

Si derivem L_A respecte t:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_0^{\text{ext}} - M \vec{V}_{\text{cm}} \times \vec{V}_A + M (\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{cm}}) \times \vec{a}_A - \vec{V}_A \times \vec{P} - \vec{r}_A \times \vec{F}^{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{ext}} + M (\vec{r}_A - \vec{r}_{\text{cm}}) \times \vec{a}_A$$

Llavors,

$$\frac{d\vec{L}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{M}_{\text{cm}}^{\text{ext}}$$

Vegem què passa amb l'energia

$$\begin{aligned} E_C &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_{\text{cm}} + \vec{V}_{\text{cm}})^2 = \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_{\text{cm}})^2 + \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_{\text{cm}}) \cdot \vec{V}_{\text{cm}} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_{\text{cm}}^2 = \\ &= \left(\sum m_i \vec{v}_i \right) \vec{V}_{\text{cm}}^2 - \sum m_i \vec{V}_{\text{cm}}^2 = \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_{\text{cm}})^2 + \frac{1}{2} M \vec{V}_{\text{cm}}^2 \end{aligned}$$

Llavors,

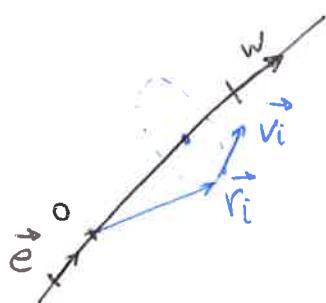
$$E_C = \frac{1}{2} \left(\sum m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_{\text{cm}})^2 + M \vec{V}_{\text{cm}}^2 \right)$$

Per Teorema:

$$\Delta E_C = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 1} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{dl} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{dl} \neq 0$$

Per tant, les forces internes també s'han de tenir en compte.

Sòlid rígid:



$$\begin{aligned} \vec{L}_e &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \omega \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\epsilon} \times \vec{r}_i) \\ \vec{\epsilon} \cdot \vec{L}_e &= \vec{\epsilon} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \omega \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\epsilon} \times \vec{r}_i) \right) \cdot \vec{\epsilon} \\ \vec{v}_i &= \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \vec{\omega} \times \vec{r}_i \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

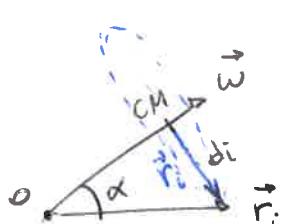
$$\Rightarrow L_e = \omega \sum m_i d_i^2.$$

Def: El moment d'inèrcia el definim com a $I = \sum_i m_i d_i^2$

Entonces, $L_e = I_e \omega \rightarrow \frac{dL_e}{dt} = I_e \alpha = M_e$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_i' \\ |\vec{v}_i'| = |\omega \times \vec{r}_i| = |\vec{r}_i| \cdot |\omega| \sin \alpha \\ \Rightarrow d_i = |\vec{r}_i| \sin \alpha = d_i = |\vec{v}_i'|$$

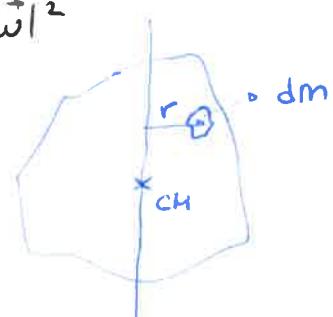
Energia cinètica del cos rígid:



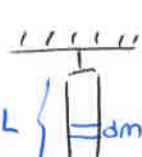
$$E_C = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM})^2 = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i d_i^2 \\ I_{CM}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Obs: $I_{CM} = \sum m_i d_i^2 \Rightarrow I_{CM} = \int r^2 dm$



Ex: (Regle penjant del sostre)

 $dm = \lambda dr$ (λ densitat lineal)

$$I_o = \int_0^L r^2 dm = \int_0^L r^2 \lambda dr = \frac{1}{3} \lambda L \cdot L^2 = \frac{1}{3} m L^2$$

Prentent O el centre de massa (centre del regle):

$$I_{CM} = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \lambda dr = \frac{1}{3} \lambda r^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{3} \lambda \left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \lambda \frac{L^3}{4} = \frac{1}{12} m L^2$$

Teorema (Steiner)

O, CM eixos paral·lels

$$I_o = I_{CM} + Md^2$$

Dem:

$$I_{CM} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_o = \sum m_i (x_i^2 + (y_i + a)^2) = I_{CM} + Ma^2 + 2a \sum m_i y_i$$

coord y del CM
en el SR basat
en CM

□

corol·lari: El CM és el punt amb moment d'inèrcia més petit.

Ex:

$$\frac{1}{3}ML^2 = ? \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \checkmark$$

Teorema (forces nives al sòlid)

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_i$$

Teorema a la
partícula

Dem:

$$\text{Prenem } \frac{dE_C^i}{dt} = (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) \cdot \vec{v} = \vec{F}_i^{ext} \vec{v}_i + \vec{F}_i^{int} \vec{v}_i$$

si fem el sumatori general obtenim, a les \vec{F}^{int} :

$$\vec{F}_{12} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{21} \vec{v}_2 = \vec{F}_{12} \vec{v}_1 - \vec{F}_{12} \vec{v}_2 = \vec{F}_{12} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\text{A més, com que } \frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{r})^2 = 0 \longrightarrow \vec{v}_i - \vec{v} = 0$$

$$\text{Llavors, } \frac{d}{dt} E_C = \sum_i \frac{dE_C^i}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E_C = \sum_i \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_i \quad //$$

Percussions: (Molta força en un espai molt petit de temps)

Aquest tipus de força venen definits per:

- Impuls: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$
- Impuls angular: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o \cdot dt$

Xocs: En un xoc es pot perdre energia cinètica



- Com que no hi ha forces extenses, \vec{P} es conserva \rightarrow
 $\rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \rightarrow m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f})$ (1)

- Suposem que es conserva l'Ec:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = -m_2 (v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \quad (2)$$

- Si fem $\frac{(2)}{(1)}$ obtenim $v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \rightarrow v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$
 $\Rightarrow v_{rel,i} = -v_{rel,f}$

Sigui $e :=$ coef. de restitució,

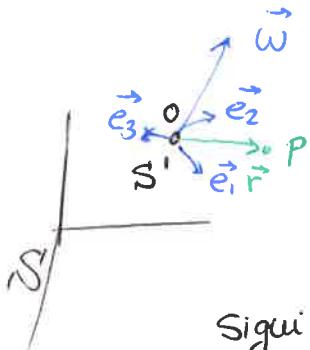
$$e = \frac{-v_{rel,f}}{v_{rel,i}} \rightarrow e = \begin{cases} 1 & \text{elàstic} \\ 0 & \text{inelàstic} \end{cases}$$

A més, tenim:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) v_{rel,i}^2$$

3. Canvis de sistema de referència

i. Sistemes de referència inercial i no inercial



Suposem O punt qualsevol (en moviment o no) :

$$\left(\frac{d\vec{e}_i}{dt} \right)_S := \vec{\omega} \times \vec{e}_i$$

$$\text{Sigui } P \text{ tq } \vec{r} = r'_1 \vec{e}'_1 + r'_2 \vec{e}'_2 + r'_3 \vec{e}'_3$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{S'} = \frac{dr'_1}{dt} \vec{e}'_1 + \frac{dr'_2}{dt} \vec{e}'_2 + \frac{dr'_3}{dt} \vec{e}'_3$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S &= \underbrace{\frac{dr'_1}{dt} \vec{e}'_1 + \frac{dr'_2}{dt} \vec{e}'_2 + \frac{dr'_3}{dt} \vec{e}'_3}_{\left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{S'}} + r'_1 \vec{\omega} \times \vec{e}'_1 + r'_2 \vec{\omega} \times \vec{e}'_2 + r'_3 \vec{\omega} \times \vec{e}'_3 \\ &\quad + \vec{\omega} \times r'_1 \vec{e}'_1 + \vec{\omega} \times r'_2 \vec{e}'_2 + \vec{\omega} \times r'_3 \vec{e}'_3 \end{aligned}$$

$$\text{Llavors, observem que } \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

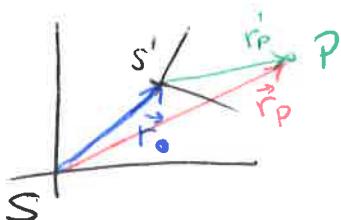
$$\text{En general, } \boxed{\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_S = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{u}_{S'}}$$

Vegem la relació que hi ha amb les velocitats i acceleracions des de diferents sistemes de referència:

Suposem que tenim un sistema S i un sistema S' que es mou respecte S.

Llavors, $(\vec{r}_0)_S$ és el vector posició de l'origen de S', i \vec{v}_0

$$\text{Obs: } \vec{r}_P = \vec{r}_0 + \vec{r}'_P$$



Ara busquem la velocitat i l'acceleració associades:

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}'_p}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{v}'_p + \vec{\omega} \times \vec{r}'_p}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_p}{dt} &= \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{v}'_p}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}'_p) \Rightarrow \vec{a}_p = \vec{a}_o + \vec{a}'_p + \vec{\omega} \times \vec{v}'_p + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_p + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_p) \\ &\Rightarrow \vec{a}_p = \vec{a}_o + \vec{a}'_p + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'_p}_{\text{acceleració de Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_p)}_{\text{acceleració centrípeta}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_p \end{aligned}$$

Com hem vist, \vec{a}_p es possible que sigui $\neq 0$ encara que la partícula es mogui a $v = ct$ des de S' .

Llavors, si S és inercial, S' no compleix la la llei Newton \Rightarrow
 $\Rightarrow S'$ no és inercial.

Vegem què podem fer en un sistema no inercial:

$$\vec{a}_S = \vec{a}_o + \vec{a}_{S'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{S'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{S'}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{S'}$$

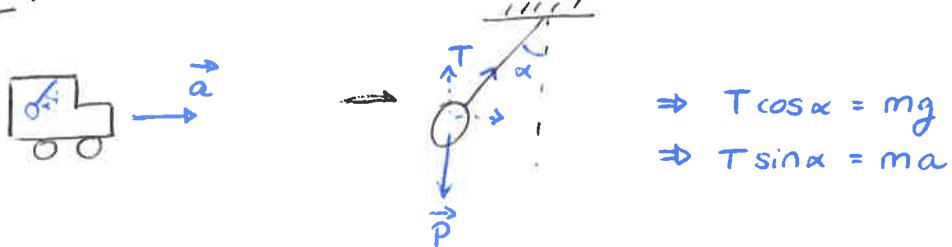
$$\vec{F} = m\vec{a}_S = m\vec{a}_o + m\vec{a}_{S'} + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{S'} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{S'}) + m\vec{\alpha} \times \vec{r}_{S'}$$

$$\text{Llavors, } m\vec{a}_{S'} = \vec{F} - \left[\vec{m}\vec{a}_o + 2\vec{m}\vec{\omega} \times \vec{v}_{S'} + \vec{m}\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{S'}) + \vec{m}\vec{\alpha} \times \vec{r}_{S'} \right]$$

Forces reals que actuen sobre el cos

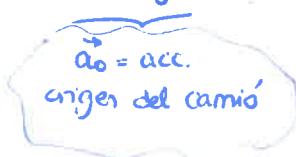
(Forces fictícies que cal afegir a les forces reals pq es compleixin les lleis de Newton en sist NO inercials)

Ex:



Si ho mirem des del camió, tenim $\sum F = 0$, perquè no es mou.

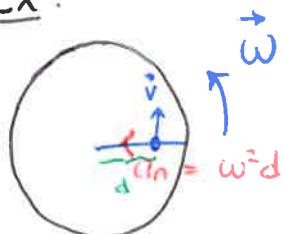
En realitat, $m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0$



Donat l'angle α que forma el pèndol, l'acceleració del camió és:

$$\begin{aligned} T \cos \alpha &= mg \\ T \sin \alpha &= ma \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow T = \frac{mg}{\cos \alpha} \\ \hookrightarrow mg \tan \alpha = ma \rightarrow a = g \tan \alpha \end{array} \right.$$

Ex:

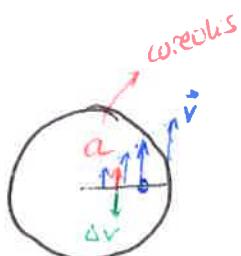


Per tal que l'home es mantingui a la posició sense reliscar, $F_\mu \leq \mu \vec{N}$.

En aquest cas, $F_\mu = m a_n = m w^2 d$.

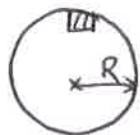
Apareix, en aquest sistema no inercial, la força centrífuga, que provoca que el senyor no es mogui pq contrarresta la F_μ .

Ex:



La velocitat lineal depèn de la distància al centre. Llavors, si l'individu es desplaça cap al centre de rotació, la velocitat disminuirà, però ell no notarà cap canvi. Això és degut a la força de Coriolis, que contrarresta l'acceleració produïda en el canvi de velocitat.

Ex:

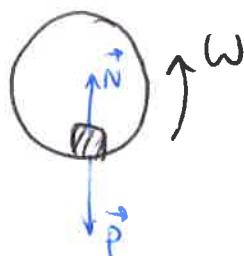


Quina ω ha de tenir el cos per no caure en un looping? (Amb $\vec{N} = 0$ a dalt)

* Vist des de dins, $\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{P} - \vec{F}_{cf} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow mg = m\omega^2 d \rightarrow g = \underline{\underline{\omega^2 R}}$

* Vist des de fora: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_n$ Veiem que el cos gira, llavors $\exists \vec{F}_{cp}$ que ha de ser igual a \vec{P} necessàriament, ja que no actuen més forces. $\rightarrow \vec{P} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow$
 $\Rightarrow mg = m\omega^2 d \Rightarrow g = \underline{\underline{\omega^2 d}}$

b)

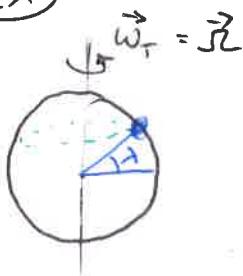


Quina és \vec{N} al punt més baix?

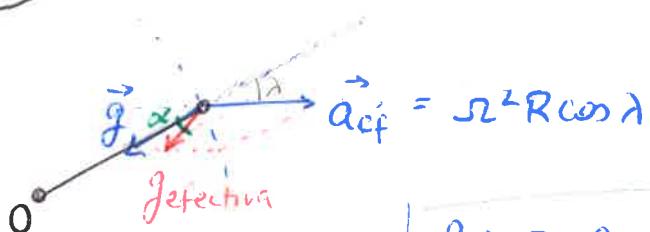
* Vist des de dins, observem que $\sum \vec{F} = 0 \rightarrow$
 $\vec{P} + \vec{F}_c = \vec{N} \Rightarrow \vec{N} = mg + m\omega^2 R \quad \checkmark$

* Vist des de fora, observem que només actua F_{cp}
 $\rightarrow \vec{N} - \vec{P} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow \vec{N} = \vec{P} + \vec{F}_{cp} \quad \checkmark$

(Ex)



$$\vec{\Omega} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 7 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

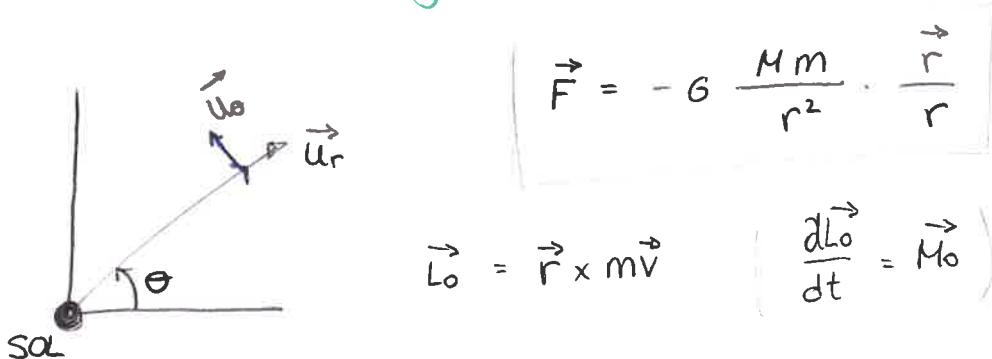


$$| g_{\text{ef}} = g - \Omega^2 R \cos^2 \lambda |$$

$$H = \Omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha = \frac{\Omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda}{g - \Omega^2 R \cos^2 \lambda}$$

4 Camp gravitatori

1. Llei de Newton de la gravitació. Energia potencial gravitacional



Volem deduir \vec{v}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

$$\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Observem que $|L_0| = mr^2\dot{\theta} = L \rightarrow \text{constant}$

Sabem que, en general: $\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$, $\nabla U = \frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$

A més, com que $\vec{F}(r) = -\nabla U \Rightarrow \frac{dU}{dr} = -f(r)$

Per tant, $U(r) = - \int -\frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} + C \quad (C=0, U(\infty)=0)$

D'aquí deduïm que:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Notació: $K = \underline{\underline{GMm}}$

Vegem què passa amb l'Energia Mecànica:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{m^2r^2}\frac{L^2}{m^2r^2} - \frac{K}{r} =$$

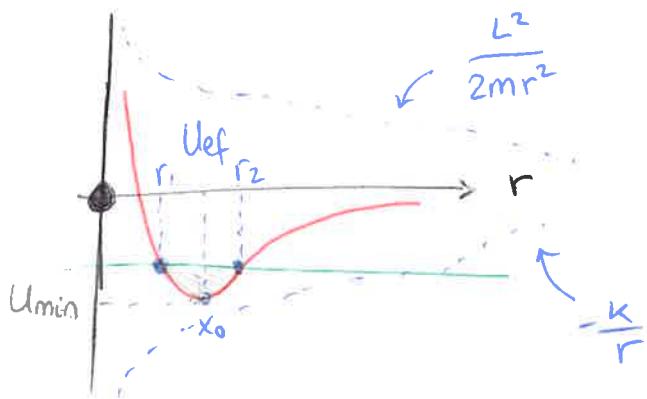
$$= \left[\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} \right] \right] = E_{mec}$$

$U_{ef}(r)$

potencial efectiu

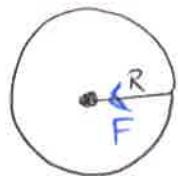
$L = mr^2\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} = E_{mec}$$



Obs: Només tindrà mov. circular a r_0 perquè sinó apareixerien dues distàncies al focus diferents.

(Ex) Sabent \vec{F} , quina E té un mòbil que està fent un MC?



$$\vec{F} = m\vec{a}_n = m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}$$

Per tant, $E = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$

Anem a deduir r_0 :

$$f(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \rightarrow f'(r) = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2}$$

Per trobar r_0 trobem el mínim: $f'(r_0) = 0 = -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{k}{r_0^2}$

$$f(r_0) = \frac{\frac{L^2 m^2 k^2}{2m(L^2)^2}}{-\frac{kmk}{L^2}} \Rightarrow U_{min} = \frac{-mk^2}{2L^2} \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{mk}$$

Sigui $L = mRv = mR\sqrt{\frac{GM}{R}}$ i $k = GMm$. Llavors:

$$U_{min} = \frac{-mG^2M^2m^2}{2m^2RGM} = \frac{-6Mm}{2R}$$

Ara, tenint $E = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$

si $u = \frac{1}{r}$, $\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \dot{r} \frac{1}{\theta} = -\frac{m\dot{r}}{L} \Rightarrow \dot{r} = \left(-\frac{du}{d\theta}\right) \frac{L}{m}$

Substituint, $E = \frac{1}{2}m \frac{L^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m} u^2 - ku \iff$

$\iff \frac{2m}{L^2} E = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2mk}{L^2} u$

Derivant: $0 = 2 \left(\frac{du}{d\theta}\right) \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} - \frac{2mk}{L^2} \frac{du}{d\theta} \Rightarrow u'' + u = \frac{mk}{L^2}$
 (Suposem $\frac{du}{d\theta} \neq 0$)

Resolent: $u(\theta) = A \cos(\theta + \varphi_0) + \frac{mk}{L^2}$

Si substituïm $u(\theta)$ a l'equació de dalt, obtenim:

$A^2 = \frac{m^2 k^2}{L^4} \left(1 + \frac{2EL^2}{mk^2}\right)$

Def: sigui $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$. L'excentricitat

Llavors, $A = \frac{mk}{L^2} e$

Com que $u = \frac{1}{r}$: $\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left(1 + e \cos \theta\right)$ (equació cònica)

Llavors, qualsevol cos afectat per la gravetat del Sol,

si $e=0 \Rightarrow R=c t \rightarrow$ descriu una circumferència

$e \in (0,1) \rightarrow$ Elipse

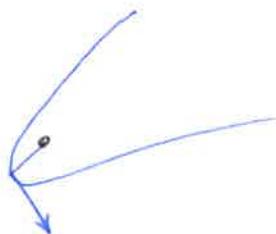
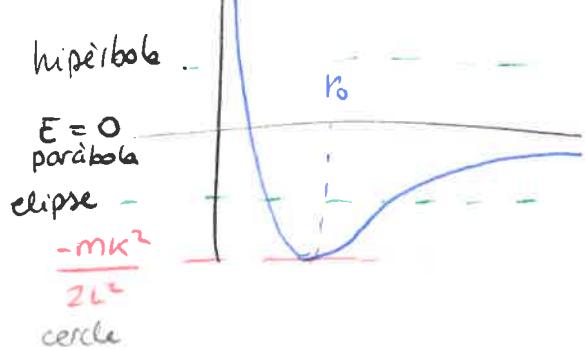
$e=1 \rightarrow$ paràbole

$e > 1 \rightarrow$ hipèrbola

Obs:

- * La trajectòria és una circumferència ($e=0$) quan ens trobem al punt de potencial efectiu mínim ($E = \frac{-mk^2}{2L^2}$)

- * Si ens trobem en un cas d' $E=0$:



Llavors, $e=1 \Rightarrow$ paràbola

- Busquem la velocitat d' escapament d' un cos.

(Això passa quan $E \geq 0$)

Considerem l'equació de E :

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GMm}{R} \rightarrow \boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

$$(v_{esc,T} \approx 11,18 \text{ km/s})$$

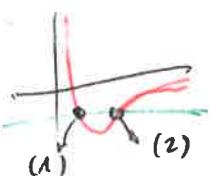
Anem a veure que per a una certa alçada $h \ll R$ que ens aixequem de la superfície de la Terra, és correcte l'expressió $E_p = mgh$

Sabem que en una òrbita el·líptica, es conserva el moment

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

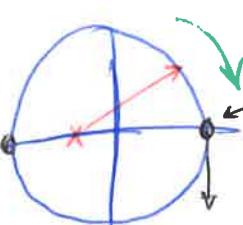
$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GMm}{r}$$



punt de dist. mínima (2)
($r=0$)

(2)



punt de distància màxima (1)
($r=0$)

(1)

$$U(r) = -\frac{GMm}{R_T + h} = -\frac{GMm}{R(1 + \frac{h}{R})}$$

Sigui $x = \frac{h}{R_T}$ $\Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{R(1+x)} \approx -\frac{GMm}{R}(1-x)$

$$\Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{R_T} + m \left(\frac{GM}{R^2} \right) h$$

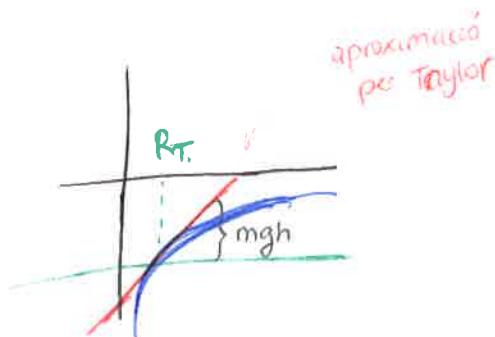
E_{P_T} g

$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$
per Taylor

Aleshores, $U(R_T + h) - U(R_T) = \boxed{\Delta U = mgh}$

Per tant, observem que l'origen d'energia potencial pot ser el que ens convingui, degut que només ens és útil la diferència.

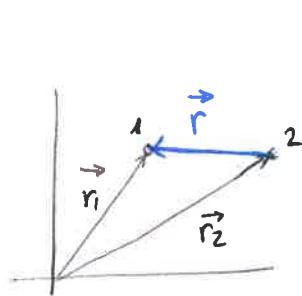
Obs: La funció de l' E_{Pg} :



El problema dels dos cossos

Suposem que tenim dos cossos:

Força que 2 fa sobre 1



$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{1 \text{ ext}}^{\text{ext}}, \quad (2)$$

$$\text{on } \vec{F}_{1 \text{ ext}}^{\text{ext}} = -\frac{GMm_1}{d_{S \rightarrow 1}^2}$$

$$(1) \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \text{ ext}}^{\text{ext}}, \quad \vec{F}_{2 \text{ ext}}^{\text{ext}} = -\frac{GMm_2}{d_{S \rightarrow 2}^2}$$

$$m_1(1) - m_2(2) \Rightarrow \left[m_2 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m_2 \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + m_2 \vec{F}_{1 \text{ ext}}^{\text{ext}} \right] - \left[m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_1 \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + m_1 \vec{F}_{2 \text{ ext}}^{\text{ext}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = (m_1 + m_2) \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \cancel{k m_1 m_2} - \cancel{k m_2 m_1}$$

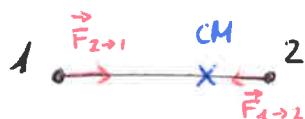
$$\vec{F}_{1 \text{ ext}}^{\text{ext}} = -\frac{GMm_1}{d_{S \rightarrow 1}^2} \overset{0}{\vec{u}} = \vec{k} m_1$$

Sigui $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ la massa reduïda:

$$\vec{F}_{2 \text{ ext}}^{\text{ext}} = -\frac{GM}{d_{S \rightarrow 2}^2} m_2 \vec{u} = \vec{k} m_2$$

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1}}$$

Ex:



Si posem l'origen de coords. sobre CM:

$$\vec{r}_1 \quad \longleftrightarrow \quad \vec{r}_2$$

Sabem que, a CM, $\sum F = 0 \rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 \quad \left. \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{r} = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2 - \vec{r}_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r} = -\frac{M}{m_1} \vec{r}_2$$

Llavors,

$$M = m_1 + m_2$$

$$\left| \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} \right|$$

Volem veure la trajectòria dels dos cossos.

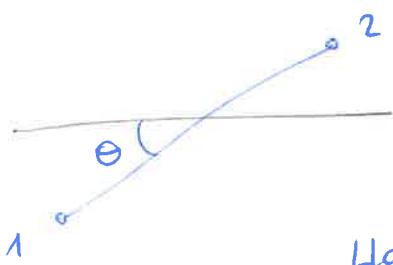
* Sabem que el moment angular \vec{L}_{CM} es conserva. (Per ser 0 cm)

$$\begin{aligned} \text{Llavors, } \underline{\vec{L}_{CM}} &= \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \vec{v}_1 - \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \vec{v}_2 \\ &= \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{r} \times \underline{\mu \vec{v}_{rel}} \end{aligned}$$

* Sabem que es conserva l'energia (Per ser F conservatives)

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Si ho passem a coordenades polars, obtenim el mateix problema de Kepler:



Obtenim que:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r} \times \mu (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)$$

v^2 (Per pitagòres)

"

Llavors, $\boxed{\vec{L}_{CM} = \mu r \dot{\theta}}$

Substituint a l' equació de l' energia:

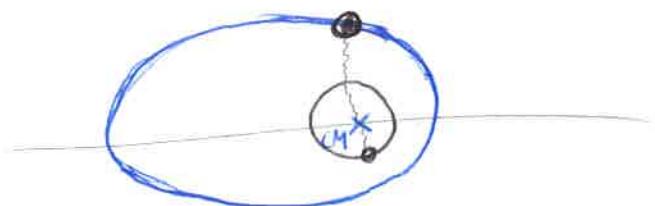
$$E = \frac{1}{2} \mu r \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \mu r \dot{r}^2 + \frac{L_{CM}^2}{2\mu r^2} - k/r = E}$$

U_{ef}

Com vam veure en el problema de Kepler:

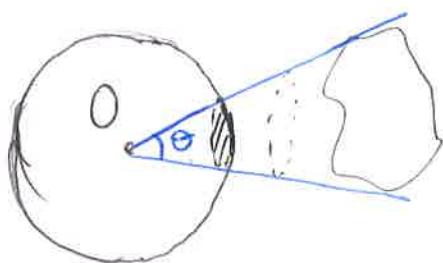
$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\mu G m_1 m_2}{L_{CM}^2} (e \cos \theta + 1)} \quad (equació cònica)$$

$r_2 \rightarrow$ obtenim l'elipse que fa 2 respecte CM
 $r_1 \rightarrow$ "



Teorema de Gauss per a camps newtonians

Def: L'angle sòlid es defineix com a l'angle que abarca un cos respecte d'un espectador situat a O.



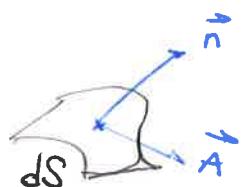
$$\int d\Omega = \int \frac{dS}{R^2} \rightarrow \Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\Omega = 4\pi}$$

Per un angle θ es té:

$$\int d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{R^2}$$

Signi $\vec{A}(\vec{r})$ un camp vectorial



$$\vec{dS} = dS \vec{n}$$

$$\vec{A} = \vec{A} \vec{t}$$

Def: Signi $d\phi = \vec{A} \cdot \vec{dS} = \vec{A} \cdot \vec{n} dS$

$$\text{El flux } \phi = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_S A \cos \theta dS$$

Def: Els camps newtonians són aquells que es poden expressar com:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{C}{r^2} \vec{u}_r$$

Teorema (Gauss)

$$\phi = \begin{cases} 4\pi C & \text{si } O \text{ dins de la superfície} \\ 0 & \text{si } O \text{ està fora} \end{cases}$$

↳ flux del camp.

Dem:

$$\bullet \quad \phi = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = C \oint_S \frac{\vec{ur} \cdot \vec{n} \, dS}{r^2} = C \oint_S \frac{\cos \theta \, dS}{r^2} = 4\pi C \quad (O \text{ dins})$$

$$\bullet \quad \begin{array}{c} \vec{A} \cdot \vec{n}_1 = C \, dS_1 \\ \vec{A} \cdot \vec{n}_2 = C \, dS_2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{A} \cdot \vec{dS}_1 = C \, dS_1 \\ \vec{A} \cdot \vec{dS}_2 = C \, dS_2 \end{array} \right\} = 0 \quad (O \text{ fora})$$

Obs: Veiem que $C = -GM$.

5. Electrostàtica

1. Càrrega elèctrica i estructura de la matèria

Unitats:

$$10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA} \text{ (Armstrong)}$$

$$10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ femtòmetre} := 1 \text{ fermi}$$

$$\text{La càrrega d'un electró és } 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

masses

$$n^o = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$p^+ = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$e^- = 9,1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Príncipi de conservació de la càrrega:

La càrrega no es crea, només es transfereix.

Llei de Coulomb:

$$\vec{F}_{AB} = K \frac{q_A q_B}{|r_{AB}|^3} (\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

ϵ_0 := permitivitat al buit

$$\approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \text{C} \cdot \text{V}$$

Obs: La força elèctrica és més forta que la gravitacional.

$$\frac{F_{el}}{F_g} = 1,2 \cdot 10^{36}$$

2. Camp elèctric. Potencial electrostàtic. El dipol elèctric

Def: El camp elèctric \vec{E} una càrrega q és creat per

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{K q_A}{|\vec{r} - \vec{r}_A|^3} (\vec{r} - \vec{r}_A)$$

$$\text{i tenim que } \vec{F}_{el} = q \vec{E}$$

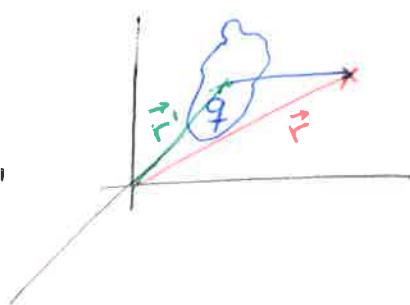
Obs: El camp creat per més d'una càrrega: $\vec{E}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$

En cas que tinguem una distribució contínua de càrregues:

$$dq = \rho dV, \quad \rho = \frac{Q}{V} \quad r' \text{ és l' encarregat d' escombrir tot el volum}$$

i tindriem: $\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k \rho(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$

$$E_x(x, y, z) = \int \left(\frac{k \rho(x', y', z') (x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right)^3 dx' dy' dz'$$



De la mateixa manera, tenim $E_y = E_z$.

Ens tornem a centrar en el cas d'una sola partícula:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k q_A}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \quad \text{Sigu: } V \text{ tq } \boxed{\vec{E} = -\nabla V} \quad (\text{potencial elèctric})$$

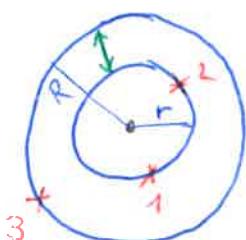
Observem que el treball realitzat per anar de un punt a un altre és:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{E} \times d\vec{l} = \int_1^2 -\nabla V \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 dV = V(1) - V(2)$$

Aleshores,

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{k q_A}{r}}, \quad \text{considerant l' origen de potencial a l' infinit.}$$

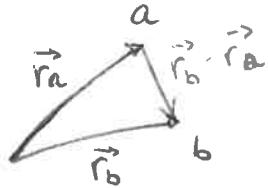
Llavors, podem definir superfícies equipotencials:



$$W_{1 \rightarrow 2} = \Delta V = 0$$

$$W_{2 \rightarrow 3} = W_{1 \rightarrow 3} = \Delta V = \frac{kq}{R} - \frac{kq}{r}$$

Rec:



$$\vec{F}_{a \rightarrow b} = k \frac{q_a q_b}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^3} (\vec{r}_b - \vec{r}_a)$$

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = k \frac{q_a}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

Definim funció escalar: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V$ potencial elèctric

$$= -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \text{ en esfèriques} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \int_1^2 dV = - \int_1^2 k \frac{q_a}{r^2} dr$$

$$V_2 - V_1 = k \frac{q_a}{r_2} - \frac{k q_a}{r_1}, \quad V(r_\infty) = 0$$

$$V(\vec{r}) = k \frac{q_a}{r} \quad (V) \text{ volts.} \quad 1V = \frac{1J}{1C}$$

La força per portar una càrrega a l'infinít:

$$\vec{F}_r = q_b \vec{E}_a(\vec{r})$$

$$U(\vec{r}) = q_b \cdot V(\vec{r})$$

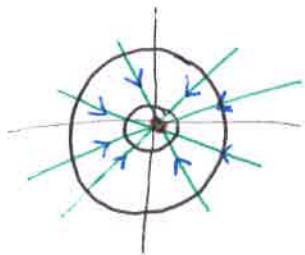
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 dV = V(1) - V(2)$$

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{k q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$V(\vec{r}) = \int \frac{k \rho dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

Def: Línees de camp: Trajectòria d'una càrrega positiva que deixem en un camp elèctric en repòs.



Def: Superfícies equipotencials:

Superfícies sense variació de V

Observem que el treball per moure's en una sup. equipotencial és 0 ($W = \Delta E_p$)

Per la fórmula, per tenir $W=0$ cal que $\vec{E} \perp \vec{dl}$.

Per tant, | línees de camp \perp superfície equipot.

Prop: Les càrregues es mouen del potencial més gran al més petit. (positives)

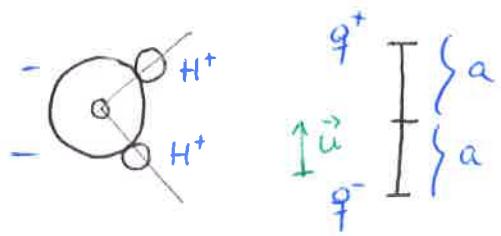
Dem:

$$\left. \begin{array}{l} q_A > 0 \\ q_B > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} V(1) = q_b 70 \\ V(2) = q_b 50 \end{array} \right\} V_1 > V_2$$

$$\left. \begin{array}{l} q_A > 0 \\ q_B < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} V(1) = q_b 70 \\ V(2) = q_b 50 \end{array} \right\} V_2 > V_1$$

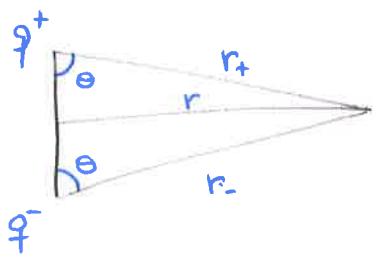
$$\left. \begin{array}{l} q_A < 0 \end{array} \right\} \text{Anàlog.}$$

Dipol elèctric



$$\vec{P} = 2a \cdot Q \vec{u} \quad (\text{Moment dipolar})$$

Calcularem el potencial i després el camp:



$$V(\vec{r}) = k \frac{q_A}{r}$$

$$V(\vec{r}) = kq \left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-} \right) = kq \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right) =$$

$$= kq \frac{\vec{P} \cos \theta}{r^2} \approx \frac{k \vec{P} \vec{r}}{r^3} =$$

Si prenem el dipol com a centre:

Despreu la distància a perquè $a \ll r$.

$V_{\text{dipol}} \ll V_{\text{càrrega}}$ → disminueix amb r
 ↳ disminueix amb r^3

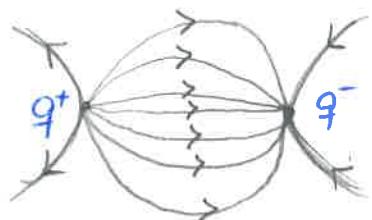
Si r és gaire gran, q^+ i q^- es consideren "molt juntes" i es cancel·len.

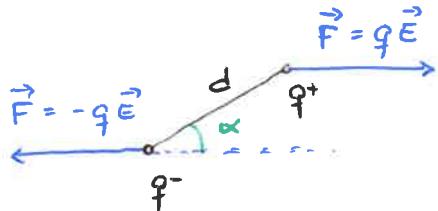
$$\underline{\underline{V}} = \frac{k(P_x x + P_y y + P_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Separarem components per a derivar més fàcilment:

$$E_x = -k \frac{r^3 P_x - (\vec{P} \cdot \vec{r}) 3r^2 \frac{x}{r}}{r^6} = -k \frac{P_x r^2 - 3(\vec{P} \cdot \vec{r}) x}{r^5}$$

$$E = \frac{3k (\vec{P} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{k \vec{P}}{r^3}$$





$$|\vec{M}| = Eq \cdot 2a \sin \alpha$$

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{P} \cdot \vec{E})$$

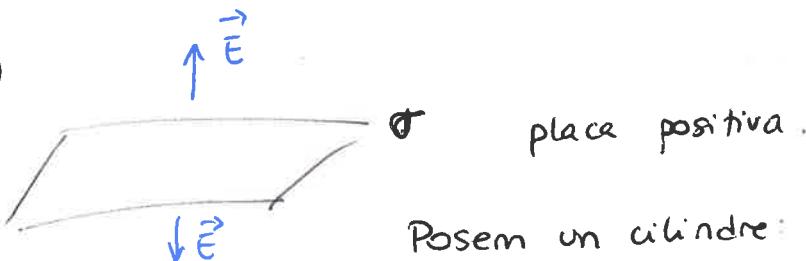
Teorema (Gauss)

El flux del camp electrostàtic és:

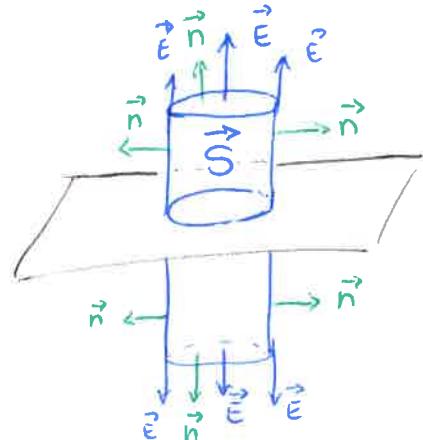
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi\epsilon_0 Q_{\text{int}} \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}}$$

(10)



Possem un cilindre:



$$\vec{S} = S\vec{n}$$

Observem que en les parets del cilindre,

$$\vec{E} \perp \vec{n} \Rightarrow \boxed{0 < 0}$$

En les tapes es té: $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{ES + ES}_{\text{Tapes}} + 0 = 2ES =$

$$= \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

\Rightarrow

$$\boxed{2\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

Tapes

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Recordatori

$$\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Sabem que \vec{E} és conservatiu.

Llavors,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}V = 0$$

Per tant, en electrostàtica es té que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot } \vec{E} = 0$

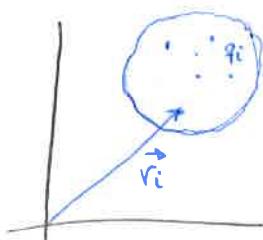
Llei de Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

"

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Aleshores, $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0}$ (1a llei de Maxwell)

Com que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$:



$$W_1 = 0$$

$$W_2 = - \int_{\infty}^{r_{12}} q_2 E_1 d\vec{l} = - \int_{\infty}^{r_{12}} q_2 (-\vec{\nabla}V) d\vec{l} =$$

$$= q_2 V_1(r_{12})$$

$$W_3 = q_3 V_1(r_{13}) + q_3 V_2(r_{23})$$

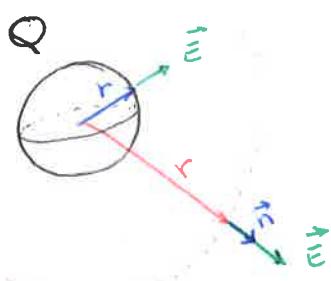
$$U = q_2 V_1(r_{12}) + q_3 V_1(r_{13}) + q_3 V_2(r_{23})$$

$$U = \sum_{a < b} q_b V_a(r_{ab}) = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} q_b V_a(r_{ab})$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} \int_V g(r) V(r) dV}$$

Exemple:

Potencial d'una esfera carregada amb f uniforme



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Utilitzarem el teorema de Gauss
Com que tenim simetria esfèrica, ens
serà més fàcil

r. Punt en el que calculem el flux

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{ur}$$

(A l'exterior)

Si ho volem calcular a l'interior:

$$4\pi r^2 E = \frac{\oint \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = \frac{3Q \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi R^3 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 4\pi E = \frac{QR}{\epsilon_0 R^3} \Rightarrow E_{int} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

$$f = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Trobem el potencial a l'interior:

$$V(r) = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow V_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C$$

(origen potencial a ∞)

A l'interior:

$$V(r) = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 + C$$

Com que no podem decidir on posem l'origen de potencial perquè l'hem triat abans, anem a veure què val C.

Imosem que $V_{ext}(R) = V_{int}(R)$



$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{-Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} R^2 + C \rightarrow C = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Per tant, $V_{int}(r) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Ara busquem l'energia:

sabem $U = \frac{1}{2} \int_V \rho V(r) dV = \frac{1}{2} \int_0^R \rho V(r) 4\pi r^2 dr =$

$$= \frac{1}{2} \frac{3Q}{4\pi R^3} 4\pi \cdot \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^R (3R^2 - r^2) r^2 dr = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 R \cdot 5} =$$

$$= \frac{3kQ^2}{R^5}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

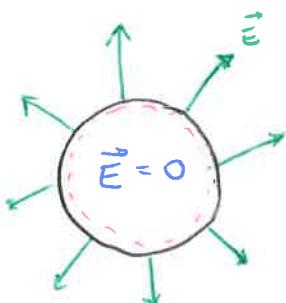
Def: Diem que un conductor està en equilibri electrostàtic si el seu camp elèctric a l'interior és 0

(En cas contrari es mouix)

$$\vec{E}_{int} = 0$$

Per la llei de Gauss, tenim que $0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_{int} = 0$$

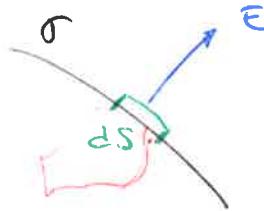


Com que tenim càregues a l'exterior de l'un diferencial (a la superfície) el camp que generen aquestes càregues en un diferencial de superfície ha de ser perpendicular

(si tinguer componenet tangencial, les càregues es mouen

Degut que la càrrega es troba concentrada a la superfície del conductor, tenim que $V = \text{ct}$.

Anem a trobar \vec{E} :

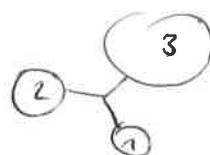


Preneint un diferencial de superfície
tenim que:

$$E \cdot dS = \frac{\sigma \cdot dS}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\int E \cdot dS = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$$

Si tenim variis conductors:



Estan en equilibri si $V_1 = V_2 = V_3$

(Un ΔV provoca moviment en les càrregues)

Com van veure l' altre dia, $V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_i} \frac{Q_i}{R_i}$

Per tant, $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} = \frac{Q_3}{R_3}, \quad Q_i = \sigma_i 4\pi R_i^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 = \sigma_3 R_3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 < R_2 < R_3 \\ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \end{array} \right.$$

Def: La capacitat elèctrica d'un conductor:

Sabem $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R V$ $\Rightarrow Q = CV$

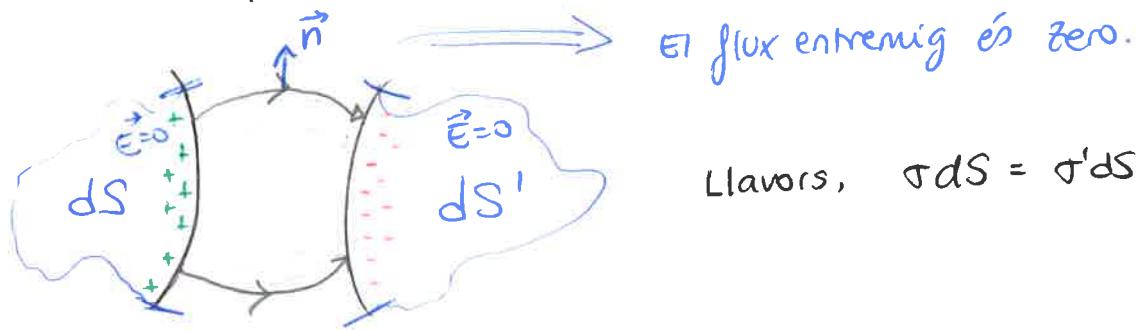
on C és la capacitat.

si conductor esténic
en general

La capacitat ve determinada per a cada material.
i es mesura en Farads (F)

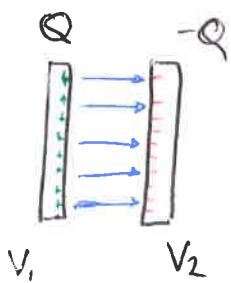
$$\boxed{1 F = \frac{1 C}{1 V}}$$

Suposem que tenim dos conductors enfrontats.



$$\text{Llavors, } \sigma dS = \sigma' dS'$$

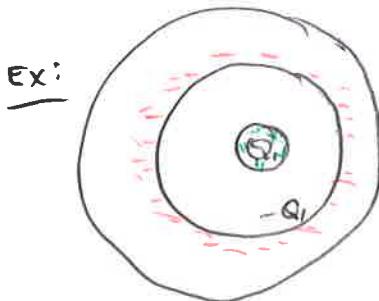
Def: Dos conductors enfrontats amb influència total es diu un condensador.



$$\text{on } \boxed{E_{\text{condensador}} = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2)} = \\ = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) = \boxed{\frac{1}{2} Q V}$$

$$\text{Com que } Q = CV \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2}}$$

Obs: Els conductors poden tenir diferents geometries.



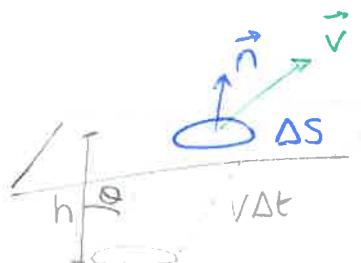
6 Electrocinetica

En aquest tema observarem què passa amb les càrregues que es mouen.

Es té que: $\int_{\text{mòbil}} + \int_{\text{fix}} = 0$

Anem a veure els mòbils:

Def: El corrent elèctric és $\vec{J} = j \vec{v}$



$$\vec{J} = j \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta S$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{j \Delta S h}{\Delta t} = \frac{j \Delta S v \Delta t \cos \theta}{\Delta t} = \vec{J} \cdot \vec{\Delta S}$$

És el flux del corrent elèctric a través d'una superfície en un cert temps

Si fem els Δ molt petits, es té:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

Def: La intensitat de corrent elèctric I és:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{A})$$

Suposem que tenim un volum.



Volem estudiar la pèrdua o guany de càrrega a l'interior.

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int \frac{\partial f}{\partial t} dV = - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0} \quad (\text{EQ. DE CONTINUITAT})$$

Llei d'Ohm

Donat un camp elèctric, la força que li fa aquest camp a les càrregues que es troben afectades és:

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

Degut a la força, es provoca una acceleració a la partícula:

$$\vec{F} = q \vec{E} = m \vec{a}$$

En aquest cas, també hi ha una força "viscosa", que depèn de la velocitat, que és provocada pels ions del medi on es troba.

Anriba un moment en que la força viscosa serà suficient per igualar la provocada pel camp, i anirà a $v = ct$.

Resolent una EDO, es pot conoure que: (LLEI D'OHM)

$$\boxed{\vec{J} = \gamma \vec{E}} \quad , \quad \text{on } \gamma = \text{conductivitat elèctrica del material.}$$

Donat un camp elèctric, hem vist que \vec{E} una força que proporciona una velocitat.

Com ja hanem vist, la potència $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \vec{v}$

$$\Rightarrow P = f \vec{v} \vec{E} V = \vec{J} \vec{E} V, \text{ si prenem una distribució de càrregues.}$$

Def: La Potència generada en un cert volum és:

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int \gamma |\vec{E}|^2 dV \quad (\text{W})$$

També es pot interpretar com a la potència dissipada en forma de calor. (Efecte Joule)

Conductors filiformes.



per l' eq. de
continuitat

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = 0 = I_B - I_A$$

Podem considerar que no hi ha flux a través del fil, ja que la velocitat la considerem tangent per ser tant primitiva.

Llavors, només considerem flux als extrems.

Obs: En un fil, la $I = ct.$

$$I = JS$$

I ct a tot
el fil
 $S :=$ secció

Trobem la diferència de potencial:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I}{s\gamma} dl = \int_a^b \frac{I}{s\gamma} dl =$$

\downarrow
 $I = ct$ en el cable

depèn exclusivament del material

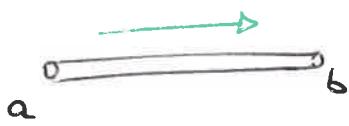
Aleshores, $\Delta V = I \int_a^b \frac{dl}{s\gamma} = IR$

on $R = \int_a^b \frac{dl}{s\gamma}$ és la resistència del fil. (-r)

Per tant, La Llei d'Ohm diu que:

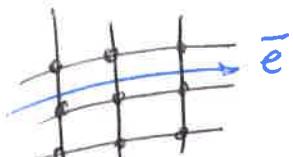
$$\boxed{\Delta V = IR}$$

La I té una certa direcció en el fil.



Degut que la càrrega va del potencial més alt al més baix, si $V_a > V_b$ es té I \rightarrow

Els metalls són conductors degut a la seva estructura atòmica, bastant rígida i uniforme i provoca que costi més que els electrons topin amb un àtom.



OBS: A temperatures molt baixes, els electrons fan menys xocs degut a un moviment menor de les particules. Això és anomenat superconductivitat.

Prenem la potència altra vegada:

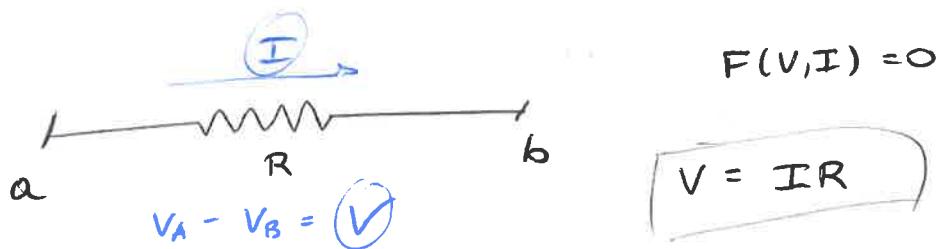
$$P = \int_V J \cdot E \, dV = \int_V E \cdot \frac{I}{S} \cdot S \, dl = I \int_a^b E \, dl = I(V_A - V_B)$$

Aleshores, la potència generada pel camp al fil (o bé la potència dissipada en forma de calor pels xocs atòmics) és:

$$\boxed{P = I(V_A - V_B) = I^2 R}$$

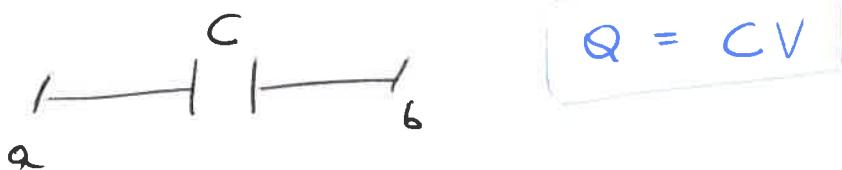
Circuits elèctrics:

Deg: Un circuit elèctric és un conjunt de conductors filiformes connectats per dos punts a i b , i es caracteritza per la diferència de potencial entre a i b i per la intensitat que el recorre.

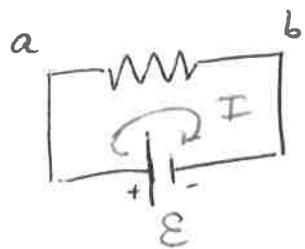


Un dels possibles elements que podem trobar és el

• Condensador:



Degut que hi ha una certa energia dissipada per l'efecte Joule, ens cal un generador que aporti l'energia necessària per tal que es mantingui constant V .



on E : força electro-motriu

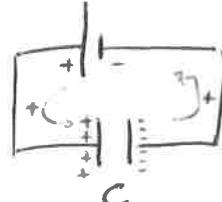
(força donada per tornar-li l'energia
inicial a les càrregues.)

$$E = (V_a - V_b) = IR$$

$$I = \frac{E}{R}$$

Tornant al condensador:

- Inicialment està descarregat.
- Quan li introduïm un generador i el connectem, el corrent es posa en moviment i el condensador queda carregat.



$$Q = C(V_a - V_b)$$

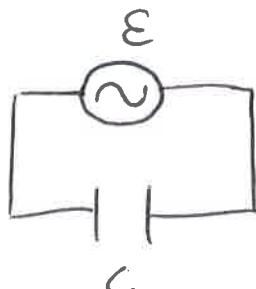
$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = 0 \text{ A}$$

Per tant, la intensitat en el circuit amb un condensador carregat i un generador de CC és 0, ja que el generador no aporta cap força perquè no hi ha cap diferència de potencial.

En cas que invertim la pila, les càrregues tornaran a moure's en l'altre sentit fins arribar a l'estabilitat.

Per tant, si ho fessim ràpidament, el corrent alternaria el seu sentit, de manera que no es perdria tensió.

Def: Un generador de corrent alterna (CA):



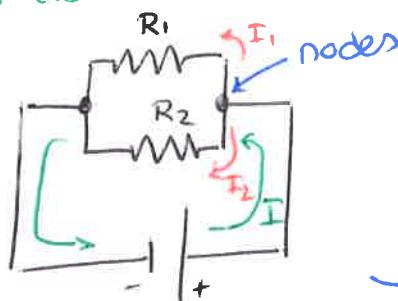
$$(E = E_0 \cos(\omega t))$$

ω := freqüència (50 Hz) a Europa

Aleshores,

$$I = C \frac{dV}{dt} = C \frac{dE}{dt} = -C E_0 \omega \sin \omega t$$

Lleis de Kirchoff

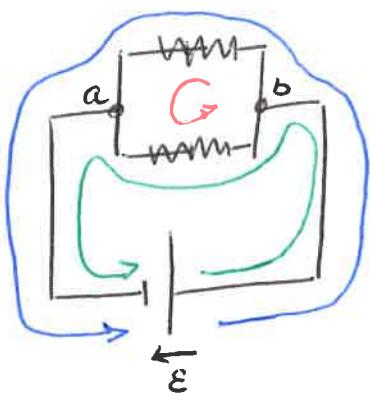


* la Llei de Kirchhoff:

$$\sum I = 0 \text{ en cada node.}$$

$$\rightarrow -I + I_2 + I_1 = 0$$

(Les intensitats que entren les considerem negatives)
" surten " positives)



III III III Cicles que pot recórrer el corrent.

za Llei Kirchhoff:

La caiguda de potencial sobre cada malla és 0:

$$\sum_i (V_{i,a} - V_{i,b}) = 0, i = \# \text{ malla.}$$

III $I_1 R_1 - E = 0$

III $I_2 R_2 - E = 0$

III $I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$

Tenim que :

$$I_1 = \frac{E}{R_1} \quad , \quad I_2 = \frac{E}{R_2}$$

Volem trobar una resistència R equivalent a les dues resistències en paral·lel.

Volem $I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = I_1 + I_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{E}{R} = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} \Rightarrow R = \boxed{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

7 Magnetostàtica

Obs: Els camps elèctrics generen un camp magnètic, i viceversa.

Per tant, les càrregues en moviment generen el camp magnètic, que interactuarà només amb les càrregues en moviment.

Llei de Lorentz:

$$\text{Les unitats de } \vec{B} \text{ són } 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

(tesla)

Suposem que tenim un camp elèctric (\vec{E}) i un camp magnètic (\vec{B}) i que hi tenim una càrrega q amb una certa velocitat \vec{v} .

Aleshores,

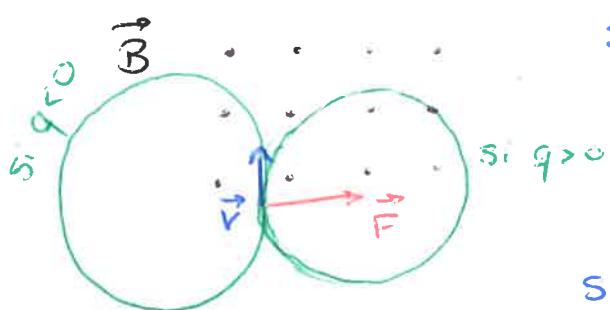
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

(gauss)

Anem a estudiar el comportament de les càrregues en un \vec{B} :

Suposem que tenim \vec{B} cap a fora:



si $\vec{v} \parallel \vec{B} \Rightarrow$ El camp \vec{B} no interacciona amb q
 $(\vec{v} \times \vec{B} = 0)$

si $\vec{v} \perp \vec{B}$:

La força \vec{F} aporta un moviment rotacional, ja que $\vec{F} \perp \vec{v}$, llavors és una força centrípeta:

$$\vec{F} = m \frac{\vec{v}^2}{R} = q \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow R = \frac{m}{q} \frac{v}{B}$$

Obs: Si $\vec{v} \neq \vec{B}$, més que formen un cert angle, les càrregues faran un moviment helicoïdal.

Estudiem ara la força que fa \vec{B} sobre un conductor filiforme:

Suposem que tenim un camp magnètic \vec{B} :

$$I = JS = qvS = nqvs \quad \text{la intensitat sobre el fil.}$$

La força que el camp magnètic fa sobre una càrrega és:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Per totes les càrregues en el fil:

$$\boxed{\vec{F} = (q \vec{v} \times \vec{B}) nsl}$$

$$\boxed{I \vec{l} \times \vec{B}}$$

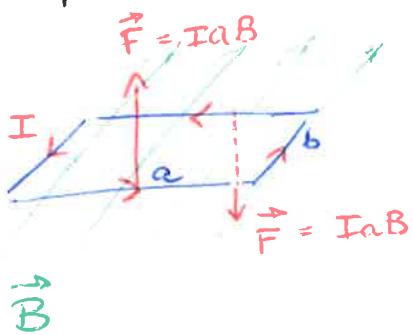
$$(I = nqsv)$$

n = n° càrregues per unitat
 de volum
 s = secció fil
 l = longitud

Si la distribució no és uniforme, la força es pot trobar:

$$\boxed{\vec{F} = I \int_C d\vec{l} \times \vec{B}}$$

Suposem que tenim un circuit elèctric:



Com que tenim forces contràries sobre diferents punts, es crea un moment que vol fer girar tot el circuit:

$$\vec{N} = (\vec{b}j) \times (-Iab \vec{B} \vec{i}) = -Iab B \vec{i}$$

Sigui $\vec{S} = ab\hat{k}$ la superfície del nostre circuit:

$$\vec{N} = -I\vec{S}\vec{B} \hat{i}$$

Per paral·lelisme amb el dipol elèctric:

Def: El moment dipolar magnètic és:

Llavors, el moment de les forces

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

És a dir, \vec{N} vol reorientar el circuit elèctric per tal que el camp magnètic sigui màxim.

Podem postular que, el camp magnètic \vec{B} creat per una càrrega en moviment és:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3}$$

on μ_0 := permeabilitat del buit = $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$

Si ho traslladem a una intensitat de corrent estacionària:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|(\vec{r} - \vec{r}')|^3} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|(\vec{r} - \vec{r}')|^3} =$$

$$\left. \begin{aligned} I &= JS = f v S = \frac{\partial Q}{\partial V} v S \\ dV &= f dl \end{aligned} \right\}$$

Si fem el quocient en mòdul de

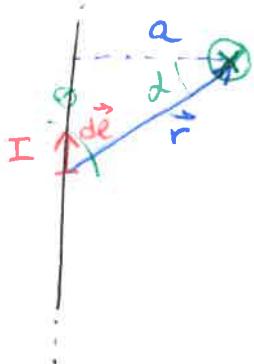
$$\frac{B}{E} \approx \mu_0 \epsilon_0 v$$

Obs: Les unitats de $\mu_0 \cdot \epsilon_0$ són com una velocitat. V^{-2}

Si fem $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$ (vel. de la llum)

Suposem ara que tenim un fil de corrent.

Volem veure el camp magnètic creat per un fil infinit:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \times \vec{r}}{r^3}$$

en direcció cap a dins del full (x)

Trobem el mòdul: $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl r \sin\alpha}{r^3} =$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos\alpha}{r^2} \quad \oplus$$

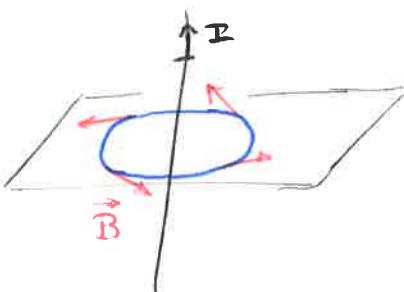
Observem que $\tan\alpha = \frac{L}{a} \rightarrow L = a \tan\alpha \Rightarrow dl = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha$

on $\cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow dl = \frac{ar^2}{a^2} d\alpha = \frac{r^2}{a} d\alpha$

$$\oplus \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos\alpha}{r^2} \frac{r^2}{a} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\alpha d\alpha$$

Aleshores, $B(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha \Rightarrow B(a) = \frac{\mu_0}{2\pi a} I$

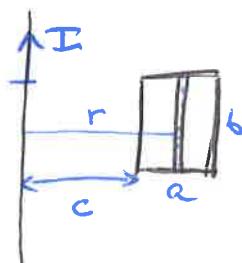
La direcció del camp és:



Per tant, el camp magnètic és tangent a una circumferència continguda al pla perpendicular al fil, de radi a .

Obs: Les línies de camp magnètic són tancades, i la circulació sobre aquesta línia tancada no és zero!

Anem a veure quin és el flux de camp magnètic creat pel fil:



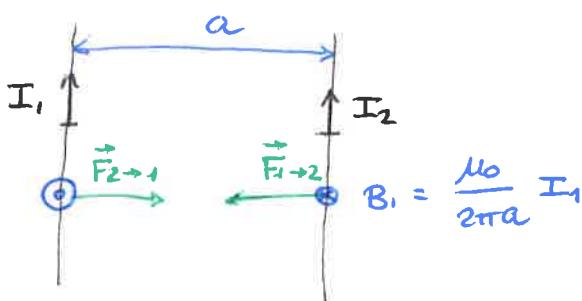
$$\Phi_B = \int_c^{cta} \frac{\mu_0}{2\pi r} I b \, dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I b \ln \frac{cta}{c}$$

$\boxed{\Phi_B = 0}$, perquè tot el que entra surt per ser línies de camp tancades.
(Sobre la superfície)

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \oint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \cdot dV = 0$$

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$

Anem a veure la força que es fan dos fils entre ells:



$$F_{1 \rightarrow 2} = I_2 l B_1 = \\ = I_2 l \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 \\ \Rightarrow \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2$$

$$F_{2 \rightarrow 1} = I_1 l \frac{\mu_0}{2\pi a} I_2, \quad \frac{F_{2 \rightarrow 1}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2$$

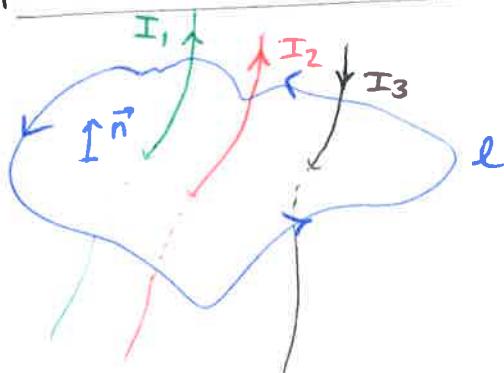
Si invertim la intensitat de un dels fils, en comptes de força d'atracció passen a formar una força de repulsió.

Llei d'Ampere

Sabem que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$.

La llei d'Ampere ens diu que:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

Aleshores,

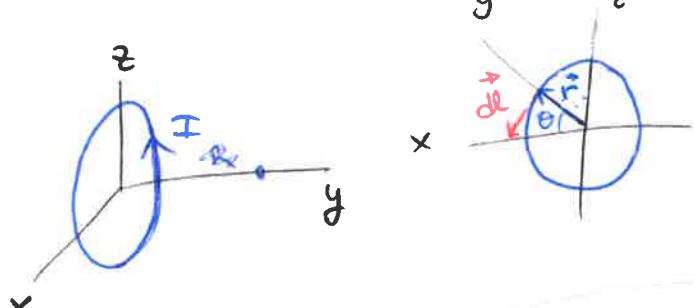
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \rightarrow \oint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \vec{J} \int_S dS$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

- Volem veure quin és el camp magnètic creat per una espira en el seu centre:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

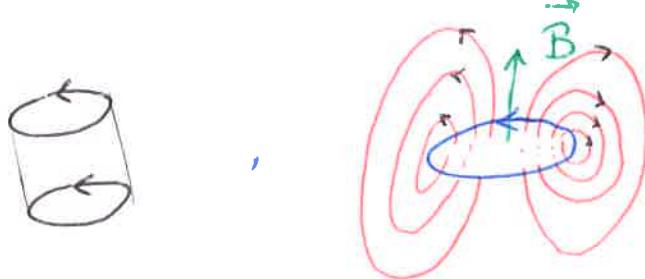
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R d\theta R}{R^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{j}}$$

$$\hookrightarrow |dl| = R d\theta$$

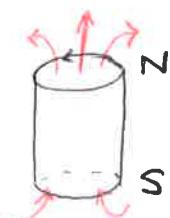
Pols dels imants



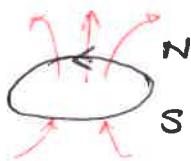
• Línies de camp magnètic

Per veure el camp magnètic creat per dues espires:

(En general, per un solenoide:)



El pol Nord d'un imant és la superfície del conductor d'on surten les línies de camp.



Obs: En el cas de la Terra, el pol nord magnètic coincideix amb el pol Sud geogràfic (Rotació horària)

\vec{E} i \vec{B} són estacionaris:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right. \quad \text{(Camps desacoblats)}$$

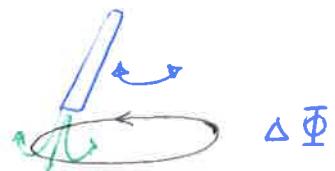
8. Equacions de Maxwell

- Els camps magnètics en moviment creen camps elèctrics
- Els camps elèctrics en moviment creen camps magnètics

Llavors, la força electromotriu induïda per l'imatge en un conductor, vol contrarrestar el creixement del camp (si creix) i:

Llei de Lenz

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$



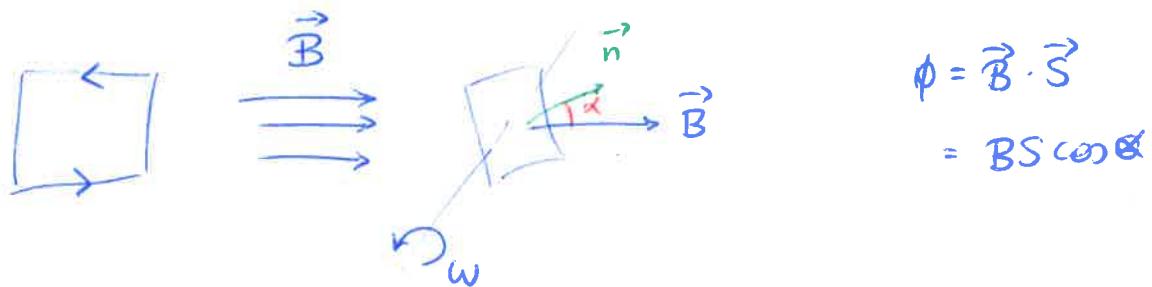
obs: El camp elèctric induït per un camp magnètic en moviment no és conservatiu i:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Lenz}}{=} - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Suposem que



Aleshores,

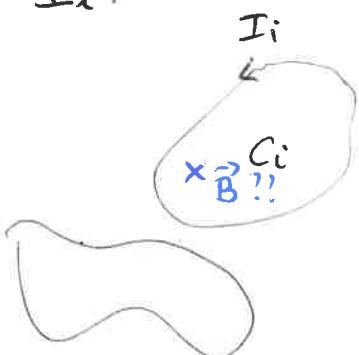
$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = BS \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = BS\omega \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin(\omega t)$$

Per tant, la intensitat es veu alterna amb el temps.

Llavors, aquest camp magnètic genera un corrent altern.

Suposem que tenim diversos circuits C_i amb una intensitat I_i :



Volem saber el camp magnètic a un cert lloc:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{C_j} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Sabem que } \Phi_{m,i} &= \int_{S_i} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \sum_j \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{S_i} \left(\int_{C_j} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d\vec{S} \\ &= \sum_j \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_i} \left(\int_{C_j} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d\vec{S} \right] I_j = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j \end{aligned}$$

L_{ij} := coef. d' inducció mútua

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{m,i} = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j}$$

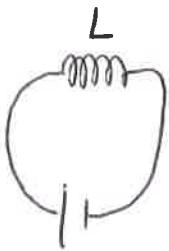
on L_{ij} := coef. d' inducció mútua
i L_{ii} := coef. d' autoinducció (henry)

Notació: El flux $\Phi_{m,i}$ es mesura amb Webers (Wb)

Aleshores, $\boxed{E_i = -\frac{d}{dt} \Phi_{m,i} = \sum_{j=1}^n L_{ij} \frac{dI_j}{dt}}$

Només influiran les intensitats variables:

Ex:

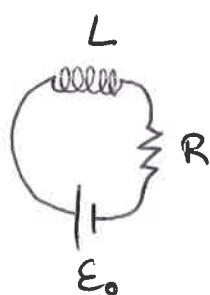


Si el solenoide té n espires:

$$(B = \mu_0 n I) / \text{camp magnètic dins del solenoide (no n'hi ha a fora)}$$

Es com que el camp magnètic del solenoide és molt més gran que el del circuit, considerem que la fem és la induïda per L .

Suposem que tenim una resistència:



Aquest tipus de circuit s'anomena RL

Suposem que tenim un interruptor obert.

A l'instant en què el tanquem, la intensitat és variable fins al seu màxim, i apareix una fem d'autointroducció:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \text{Ra Llei Kirchhoff} \quad RI = E_0 - L \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \Rightarrow \int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = K e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{E_0}{R} \quad (I(0)=0)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(t) = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(t) = -\mathcal{E}_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Vegem què passa amb l'energia:

Sabem que el generador proporciona una potència $P = \mathcal{E}_0 I$.

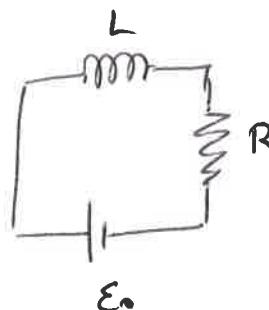
La potència dissipada per les resistències és $P = RI^2$

Per tant, la potència que queda emmagatzemada en l'autointroducció és $P = \mathcal{E}_0 I - RI^2$, en forma de camp magnètic.

$$P = (\underbrace{\mathcal{E}_0 - RI}_{\text{}}) I = L I \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) = \frac{dU}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} L I^2} \quad (\text{Energia emmagatzemada pel solenoide})$$

En resum:



$$B = \mu_0 n I$$

$$\Phi_m = L I = B n \underbrace{l \cdot S}_{\text{volum}} = \mu_0 n^2 I V \Rightarrow$$

"espines"
 longitud solenoide
 secció " "
 volum

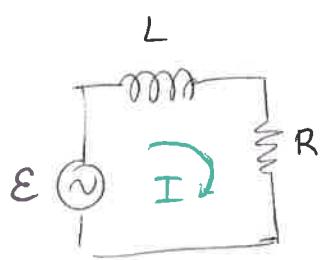
$$\Rightarrow L = \mu_0 n^2 V$$

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2}{\mu_0} n^2 I^2 V =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot V \Rightarrow \boxed{U_V = \frac{B^2}{2 \mu_0} V}$$

Energia emmagatzemada
al solenoide per
unitat de volum.

Si en comptes d'un CC posem un CA :



$$\text{Es cert que } IR = E - L \frac{dI}{dt}, \quad E = E_0 \cos \omega t$$

$$\hookrightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \cos \omega t \implies$$

$$\implies I(t) = I^{(H)}(t) + I^{(P)}(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} + I^{(P)}(t)$$

$$\text{Siguí } I^{(P)}(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} \frac{dI^{(P)}(t)}{dt} + \frac{R}{L} I^{(P)}(t) &= \frac{E_0}{L} \cos \omega t \implies Aw \cos \omega t - Bw \sin \omega t + \\ &+ \frac{R}{L}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = \frac{E_0}{L} \cos \omega t \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Aw + B \frac{R}{L} = \frac{E_0}{L} \\ A \frac{R}{L} - Bw = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\implies B = A \frac{R}{Lw} \implies A \left[w + \frac{R^2}{L^2 w} \right] = \frac{E_0}{L} \implies$$

$$\implies A \left(\frac{L^2 w^2 + R^2}{L^2 w} \right) = \frac{E_0}{L} \implies A = \frac{E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2}$$

$$\implies B = \frac{E_0 R}{L^2 w^2 + R^2}$$

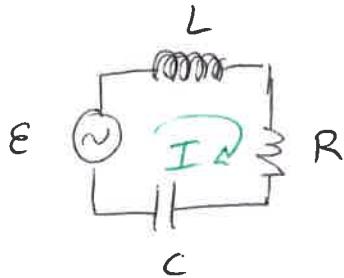
$$\begin{aligned} \implies I^{(P)}(t) &= \frac{E_0}{L^2 w^2 + R^2} Lw \sin \omega t + \frac{E_0}{L^2 w^2 + R^2} R \cos \omega t \\ &= \frac{E_0}{L^2 w^2 + R^2} (Lw \sin \omega t + R \cos \omega t) \end{aligned}$$

$$\implies I(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{L^2 w^2 + R^2} (Lw \sin \omega t + R \cos \omega t)$$

$$\text{on } K = -\frac{E_0 R}{L^2 w^2 + R^2} \quad (\text{Imposant } I(0) = 0)$$

$$\implies I(t) = \frac{E_0}{L^2 w^2 + R^2} (Lw \sin \omega t + R \cos \omega t - RC^{-\frac{R}{L}t})$$

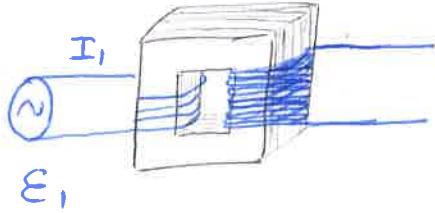
Si afegim un condensador al circuit:



Per resoldre la intensitat, ens trobem amb una EDO de 2n ordre

$$(I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int I dt)$$

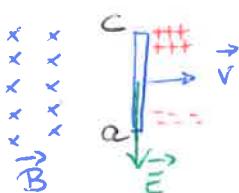
Transformador



$$\left. \begin{array}{l} E_1 - N_1 \frac{d\phi}{dt} = R I_1 \\ E_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} E_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} \\ E_2 = -\frac{N_2}{N_1} E_1 \end{array} \right.$$

Per tant, el transformador s'utilitza per variar la càrrega de potencial. Per tant, per mantenir la màxima quantitat de potència en el circuit, busquem disminuir el màxim possible la intensitat, (ja que $P = RI^2$ la potència dissipada per efecte Joule) augmentant així el potencial.

Donat un camp magnètic i una vareta en moviment:



$$\vec{F} = \bar{e} \vec{v} \times \vec{B}$$

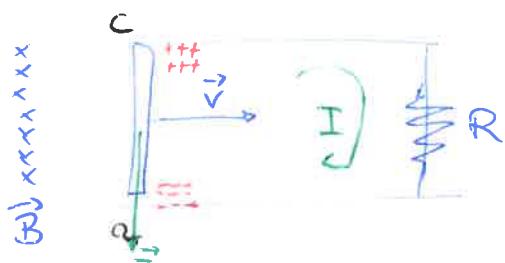
$$\bar{e} E = \bar{e} B v \quad (\text{equilibri de } \frac{F_{el}}{F_m})$$

$$* V_a - V_c = \int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = B v l$$

Per tant, la fem induïda pel moviment de la vareta:

$$\boxed{E = B v l}$$

Suposem que tanquem el circuit:



Degut que ens allunyem del camp magnètic, el flux de camp magnètic disminueix i

$$\left(\frac{d\phi}{dt} = \mathcal{E} = BLV \right) \text{ vol contramestar-ho}$$

augmentant el camp en la regió, pel que es crea un camp magnètic cap a dins i provoca una intensitat de corrent al circuit. $I \downarrow$

La potència subministrada per aquest corrent:

$$F = ILB$$

$$dW = Fvdt \Rightarrow \frac{dW}{dt} = ILBV = IV = P$$

En resum:

Sabem que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\vec{J}}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Maxwell observa que $\exists \vec{G}$: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{G}$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$$

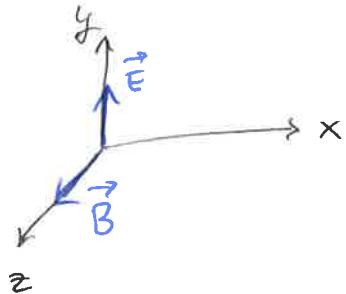
$$\Rightarrow \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{G}$$

Aleshores, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gauss } \vec{E}: \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{f}{\epsilon_0} \quad // \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \text{Llei Faraday:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad // \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \text{Gauss } \vec{B}: \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad // \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \text{Ampere - Maxwell:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad // \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \\ \qquad \qquad \qquad + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \end{array} \right\}$$

Si combinem les lleis de Faraday i Ampere - Maxwell,

s'obté:



$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = E \hat{j} \\ \vec{B} = B \hat{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad \left. \right\}$$

En general, una equació d'ona ve donada per:

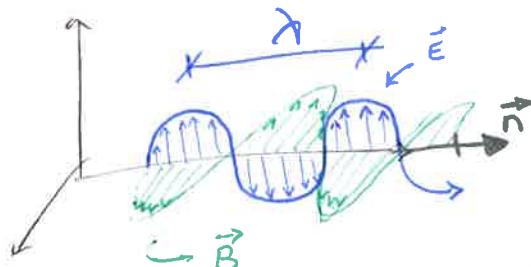
$$U_{tt} - v^2 U_{xx} = 0 \quad , \quad \text{on } v \text{ es la velocitat de propagació de l'ona.}$$

Resolent el sistema anterior, amb $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

obtenim:

$$E = E_{y,0} \sin(kx - \omega t) \quad \text{on } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \therefore \omega = ck$$

$$B = B_{z,0} \sin(kx - \omega t)$$



$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = c (\vec{B} \times \hat{n}) \\ \vec{B} = \frac{1}{c} (\hat{n} \times \vec{E}) \end{array} \right\}$$